Недосекин А.О., Абдулаева З.И.

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Часть 1. Основы финансовой математики .
Часть 2. Анализ и моделирование финансовых рынков

Санкт-Петербург, 2013 г.

Недосекин А.О., Абдулаева З.И.

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Часть 1. Основы финансовой математики

Часть 2. Анализ и моделирование финансовых рынков

Санкт-Петербург
2013

УДК 336
ББК 65.9(2Рос)-56
Н 426

Рецензенты:
Доктор экономических наук, профессор, декан экономического факультета НМСУ «Горный», заведующий кафедрой экономики, учёта и финансов И.Б. Сергеев.
Доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической теории М.М. Хайкин.

Недосекин А.О., Абдулаева З.И. **Финансовая математика** / А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева. - СПб: Изд-во Политехн. университета, 2013. - 220 с.

В учебном пособии изложены основные подходы к оценке эффективности и риска коммерческих расчётов в рамках долговых обязательств. Рассмотрен вопрос оценки наращенной и приведённой стоимости денежных потоков в рамках финансовой ренты, в том числе по инструменту облигации. Проанализированы показатели оценки эффективности инвестиционных проектов. Исследованы модели оценки эффективности операций в условиях неопределённости. Изложены подходы к справедливой (фундаментальной) оценке стоимости бизнеса.

Пособие содержит тематический указатель по данному курсу, перечень контрольных вопросов для самостоятельной работы к каждой теме, а также список учебной и нормативной литературы.

Целевая аудитория – студенты ВУЗов, аспиранты, преподаватели, научные сотрудники, специалисты в области финансового моделирования, в том числе финансовые менеджеры, аналитики и специалисты по оценке активов.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1.
ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

ВВЕДЕНИЕ ПО ЧАСТИ 1 ПОСОБИЯ

Традиционно курс «**Финансовая математика**» состоит из двух частей. В первой части – **«Основы финансовой математики»** (часть 1 настоящего пособия) - рассматриваются классические методы, применяемые в финансовых вычислениях: проценты, наращение и дисконтирование, финансовые ренты, а также некоторые схемы погашения кредитов и оценки доходности инвестиционных проектов. Эти методы применяются в финансовых операциях, в которых риск отсутствует или им можно пренебречь. Во второй части курса - «**Анализ и моделирование финансовых рынков**» (часть 2 настоящего пособия) - рассматриваются методы оценки доходности и риска фондовых активов в условиях неопределенности, в ходе формирования портфелей ценных бумаг. Также в этом курсе рассматриваются методы технического и фундаментального анализа финансовых рынков.

Назначение первой части – систематически изложить вопросы, относящиеся к ведению традиционных коммерческих расчётов, а также осветить аспекты, связанные с оценкой стоимости бизнеса. В этом состоит авторский подход к изложению курса. Традиционно вопросы оценки стоимости в разделы финансовой математики не включаются, они рассматриваются в других экономических курсах. В то же время, между двумя частями широко понимаемой финансовой математики должен быть выраженный, хорошо продуманный стык. Когда мы изучаем финансовую математику в узком смысле, мы находимся на микроуровне, анализируя денежные потоки внутри и вовне локального экономического объекта (домашнего хозяйства или банка). А финансовые рынки – это макроуровень. Связь макроуровня и микроуровня – это признание рынком ценности отдельного рыночного субъекта, что естественным образом осуществляется через оценку стоимости бизнеса.

Также авторский подход к изложению выражен в том, что первая часть пособия упреждается краткой справкой по специализированным разделам математики – теория вероятностей, теория нечётких множеств и мягких вычислений, теория рисков. Цель этой справки – создать студентам подспорье в виде компактно собранных в одном месте необходимых для освоения курса математических знаний, чтобы не заставлять их собирать эти факты в различных монографиях и учебниках.

Ключевым фактором успеха усвоения данного курса является воспроизведение всех приведённых в пособии расчётных примеров в таблицах Excel, как с использованием стандартных программ, так и при самостоятельной настройке формул. Опыт преподавания дисциплины показывает, что закрепление материала может быть реализовано только в ходе компьютерных лабораторных работ, объём которых в почасовом выражении равен или превышает объём прочитанных лекций.

Предмет финансовой математики в узком смысле – это коммерческие расчёты между двумя экономическими субъектами и их основные экономические характеристики. Указанные расчёты между субъектами возникают на основе специально создаваемых долговых обязательств. Природа долга устанавливает, что взятые в долг денежные ресурсы обладают свойствами срочности, платности и возвратности; соответственно, долговые ресурсы имеют свою цену для должника и полезность для кредитора. Если платежи в рамках долговых обязательств являются долгосрочными и многоразовыми, возникает феномен ренты, полезность которой для кредитора и затратность для заёмщика должны быть определены.

На стыке предмета коммерческих расчётов и предмета анализа финансовых рынков возникает предмет оценки стоимости бизнеса, который включает в себя, наряду с указанной тематикой, специальные вопросы финансового и экономического анализа. Аспект стоимости бизнеса, в её рыночном и нерыночном оценочном признании, увязывает в единое целое большую часть знаний, относящихся к предмету финансовой математики в широком смысле.

Все ключевые термины предмета «Финансовая математика» сведены в Глоссарий, расположенный в конце первой части пособия. Термины в тексте вводятся поэтапно, по мере изучения соответствующих разделов финансовой математики.

В пособии, в ходе изложения, используются две концепции времени:

Непрерывное время. Используется для оценки доходности финансовых инструментов, когда цена инструмента наблюдается часто, или когда в расчётах необходимо знать начальное или конечное значение цены инструмента.

Дискретное время, представленное в модели набором временных отсчётов. Такой подход применяется при анализе рент, состоящих из множества одинаковых платежей, равномерно сгруппированных на временной оси.

Принцип платности денег предполагает, что реальная стоимость денег падает во времени, даже при сохранении их номинальной стоимости. Причина такого снижения – инфляционное обесценение денег, а также снижение спроса на деньги по мере отдаления факта получения денег от момента возникновения спроса. Обесценение денег отображается в модели посредством введения в неё фактора дисконтирования. Чтобы скомпенсировать снижение стоимости денег и – частично – скомпенсировать потенциальные риски кредитора, в модель вводится фактор наращения денежных сумм, частично связанный с процентной ставкой по кредиту. Все факторы наращения/дисконтирования в модели приводятся либо к стандартному году (**проценты годовых**), либо к периоду между платежами.

Здесь же следует коснуться этической стороны взимания процентов с заёмщика. Первоначально процент (лихва) была запрещена во многих странах, в том числе в древней Иудее (применительно к соплеменникам; на инородцев это правило не распространялось). В исламской традиции сегодня взимание процента запрещено (там эта практика называется рибой). Авторская точка зрения состоит в том, что процент необходим, поскольку это плата за ресурс и плата за риск потери капитала. Подробно эта точка зрения обосновывается в [22].

При составлении части 1 настоящего пособия был использован ряд материалов учебно-методического комплекса (УМК) «Финансовая математика» [7].

РАЗДЕЛ 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ФИНАНСИСТОВ И ЭКОНОМИСТОВ

1.1. Выборочные факты теории вероятностей

Теория вероятностей имеет дело с массовыми и однородными в статистическом смысле событиями, образующими полную группу. Тогда вероятности этих событий являются классическими и определяются как частоты возникновения событий. Если однородности нет, то классическая частотная вероятность должна уступить место другим типам вероятностей, аксиоматика которых оговаривается особо. В экономике редко встретишь что-либо статистически однородное, и это накладывает свои ограничения на применение вероятностных методов в экономических исследованиях.

Поле событий может быть как дискретным, так и непрерывным; таким событиям отвечают дискретные и непрерывные случайные величины соответственно. Начнём описание с дискретного случая.

Пусть у нас есть ось X, на которой локализовано M ячеек с определёнными границами $[x_0, x_1)$; $[x_1, x_2)$; … $[x_{M-1}, x_M)$. Будем наблюдать поток статистически однородных случайных событий общим числом N. В ходе этого статистического эксперимента мы замеряем значение параметра X события, и, в зависимости от того, в какую ячейку попадает значение параметра, мы увеличиваем число относимых к ячейке испытаний на единицу. Таким образом, по результатам эксперимента у нас собирается статистика $\{n_1, …, n_M\}$, где n_1 – число испытаний, относимых к i-й ячейке. Итого выполняется:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N \ . \qquad (1.1)$$

Тогда переход от числа событий к их частоте осуществляется по формуле:

$$p_i = n_i / N, \qquad (1.2)$$

и выполняется условие нормировки для полной группы, вытекающее из (1.1):

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1 \ . \qquad (1.3)$$

Тогда **вероятность** – это относительная частота определённых исходов статистических испытаний. Набору ячеек отвечает набор частот, далее называемый **рядом распределения**. Поскольку ось X нарезана на интервалы ячеек, то уместно рассматривать случайную величину X как дискретную случайную величину, чьё значение попадает в один из предустановленных интервалов.

Кумулятивная функция распределения (**ФР**) – это полная вероятность того, что значение дискретной случайной величины X окажется меньше заведомо известного параметра x, принимающего правое значение интервала ячейки:

$$F(x) = \Pr \{X < x\}. \tag{1.4}$$

Выполняется следующий набор равенств:

$F(-\infty) = 0$; $F(x_0) = 0$; $F(x_1) = p_1$; $F(x_2) = p_1 + p_2$; …

$F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} p_j$; …

$$F(x_M) = 1;\ F(\infty) = 1. \tag{1.5}$$

Кумулятивная функция распределения вида (1.5) приведена на рис. 1.1.

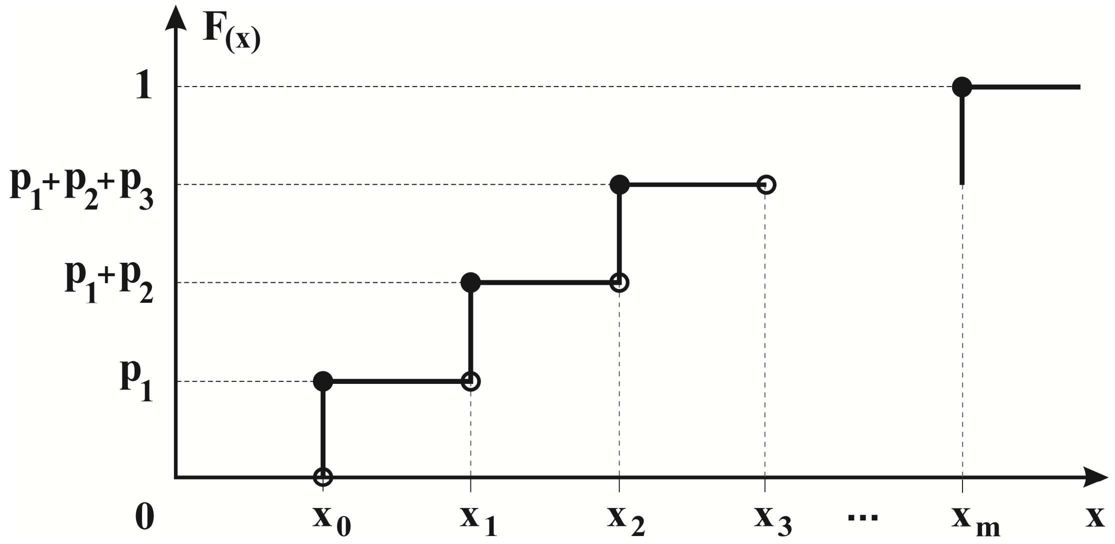


Рис. 1.1. Кумулятивная функция распределения F(x) для случая дискретной случайной величины

Частотный ряд распределения случайной величины X можно представить себе в качестве гистограммы (рис. 2).

На рис. 1.2 представлен случай унимодальной гистограммы, которой отвечает наличие одного выраженного максимума частоты. Для таких рядов целесообразно оценивать математическое ожидание дискретной случайной величины X по формуле:

$$\text{MX} = \sum_{i=1}^{M} \frac{x_i+x_{i-1}}{2} p_i \ . \qquad (1.6)$$

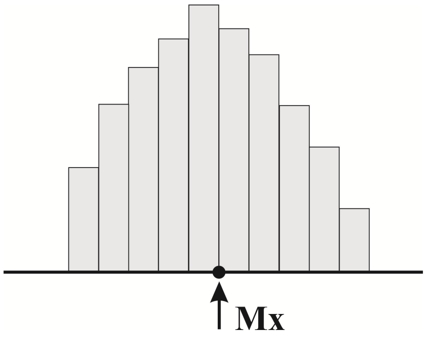


Рис. 1.2. Гистограмма ряда распределения дискретной случайной величины

Пример 1.1. Задан ряд распределения p = {0.1, 0.3, 0.4, 0.2} для четырёх ячеек, правые границы которых составляют x = {2, 3, 4, 5}. Найти MX.

Решение. В соответствии с формулой (1.6),

MX = 0.1 * (0+2)/2 + 0.3 * (2+3)/2 + 0.4 * (3+4)/2 + 0.2 * (4+5)/2 = 3.15

Таким образом, точка матожидания (центр масс системы) попадает в ячейку с координатами [3,4), что сопряжено с максимальной относительной частотой попаданий испытаний в эту ячейку (0.4).

Теперь рассмотрим случай непрерывной случайной величины. Чтобы осуществить переход от дискретного случая к непрерывному (см. рис. 1.3), необходимо:

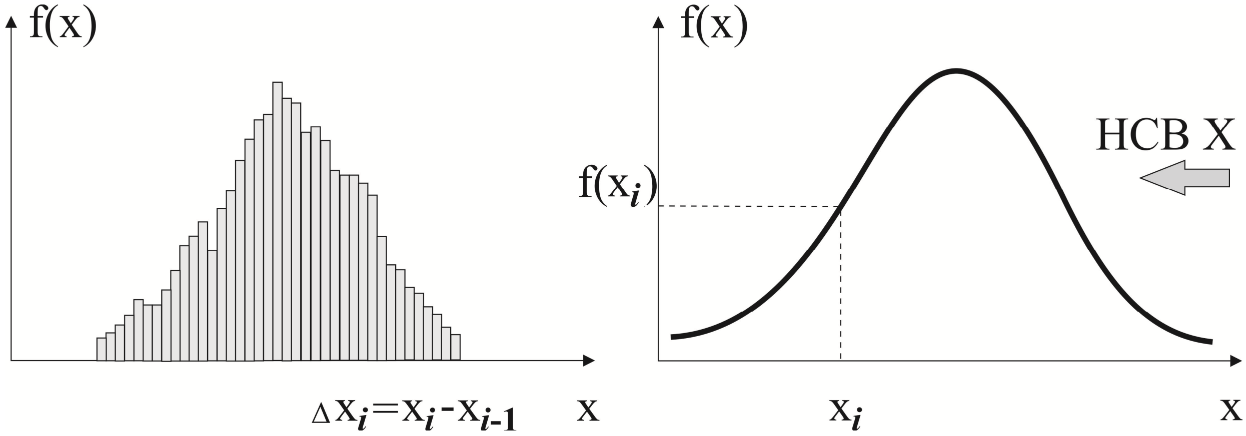


Рис. 1.3. Переход от дискретного к непрерывному случаю

- сделать бесконечно малой размер ячейки для испытаний. Если обозначить $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, то требуется $\Delta x \to 0$;

- бесконечно малый размер ячеек предполагает бесконечное количество самих ячеек, т.е. $M \to \infty$;
- бесконечному числу ячеек должно отвечать бесконечное число испытаний, чтобы обеспечить представимую статистику распределения испытаний по ячейкам, т.е. $N \to \infty$.

Тем самым, мы переходим от ряда распределения к **плотности распределения** по формуле:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p_i}{\Delta x_i} \quad . \tag{1.7}$$

Кумулятивная функция распределения (ФР) для непрерывного случая имеет такой же вид (1.4), как и для дискретного случая. Поскольку условие нормировки (1.3) выполняется и для непрерывного случая, его можно переписать, с учётом (1.7):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{(i)} f(x_i) * \Delta x_i = 1. \tag{1.8}$$

Сумма ряда бесконечно малых величин – это интеграл. Поэтому от (1.8) можно перейти к записи для ФР:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \tag{1.9}$$

что соответствует

$$f(x) = F'(x), \tag{1.10}$$

т.е. функция распределения и плотность распределения связаны между собой как первообразная и производная соответственно.

Анализируя вероятностные распределения, мы можем получить набор характеристик, называемых **моментами**. Начальный момент распределения к-го порядка определяется по формуле:

$$MX_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \quad . \tag{1.11}$$

В частности, математическое ожидание MX является первым начальным моментом распределения.

Центральный момент распределения k-го порядка оценивает распределение случайной величины, смещённой на размер своего собственного математического ожидания, и определяется по формуле:

$$DX_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x - MX)^k f(x)dx \quad . \qquad (1.12)$$

В частности, второй центральный момент – это дисперсия непрерывной случайной величины DX. Квадратный корень из дисперсии – это среднеквадратическое отклонение (СКО) случайной величины, традиционно обозначается σ.

В науке рассматривается несколько десятков наиболее ходовых вероятностных распределений, каждое из которых имеет свою аналитическую запись для f(x). Однако наиболее применяемым в экономических моделях является нормальное распределение случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1.13)$$

Это колоколообразная унимодальная функция, симметричная относительно своего центра, по абсциссе совпадающего с матожиданием MX. Для функции распределения выполняется:

$$F(-\infty) = 0;\ F(\infty) = 1;\ F(MX) = 0.5. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим предельные случаи выражения (1.12). При σ→0 выражение (1.13) приобретает вид дельта-функции Дирака:

$\delta(MX) = \infty$, $\delta(x) = 0$ при $x \neq MX$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad (1.15)$$

В этом случае, вся неопределённость исчезает, и случайная величина X перестаёт быть случайной, принимая своё постоянное значение MX. Функция распределения такой величины – это скачкообразная функция, мгновенно изменяющая своё значение с 0 на 1 в точке x=MX.

При σ→∞ максимум колоколообразной функции плотности постепенно уходит в ноль, и вся вероятностная мера концентрируется в бесконечно малой окрестности оси абсцисс X. Это есть не что иное, как выражение для винеровского белого шума. В этом случае, вообще нет и речи относительно какой-либо определенности в части X; эта случайная величина может принимать произвольные значения X, причём с одинаковой частотой.

В экономических задачах, чаще всего, выполняется условие σ<MX, т.е. случайные величины обладают ограниченной определённостью своего возникновения в испытаниях. Считается, что подавляющая доля испытаний попадает в интервал трёх сигм, т.е.

$$\Pr \{MX - 3^*\sigma < X < MX + 3^*\sigma\} \to 1, \qquad (1.16)$$

или, что то же самое,

$$F(MX + 3^*\sigma) - \quad F(MX - 3^*\sigma) \to 1. \qquad (1.17)$$

Для анализа нормального распределения в Microsoft Excel © (далее по тексту пособия мы будем употреблять сокращённое название этого табличного процессора Excel) существует стандартная функция **НОРМРАСП** {x; MX; σ; ПРИЗНАК}, где ПРИЗНАК – это условие того, что вычисляется. Если ПРИЗНАК = ИСТИНА, то вычисляется функция распределения F(x). Если ПРИЗНАК = ЛОЖЬ, вычисляется плотность нормального распределения f(x).

Пример 1.2. Пусть в момент времени t_1 на рынке инвестор покупает акцию компании ABC по цене S_1, а затем в момент t_2 он её продаёт по цене $S_2 > S_1$, т.е. извлекает курсовой доход. Доходность инвестора составляет

$$r = \frac{(S_2 - S_1)}{S_1(t_2 - t_1)} \text{ , процентов годовых.} \qquad (1.18)$$

Рыночные наблюдения за акциями ABC за сравнительно долгий период в однотипных рыночных условиях (без макроэкономических перепадов) говорят о том, что доходность по данной акции – это нормально распределённая случайная величина с параметрами Mr = 30% годовых и СКО σ = 10% процентов годовых.

Инвестор, оперируя с акциями ABC на систематической основе, рассчитывает извлекать доходность на этих операциях не хуже 20%

годовых. Всё, что ниже этого уровня, инвестор считает неблагоприятным для себя результатом. Оценить вероятность такого результата.

Решение. Вероятность негатива оценивается по формуле:

$$PrNeg = \int_{-\infty}^{20\%\text{ г}} f(r)dr = F(20\%\text{ г.}) \quad . \qquad (1.19)$$

Для Mr = 30% годовых и σ = 10% применение функции НОРМРАСП даёт F(20%) = 0.16. Это негативная вероятностная мера, сосредоточенная в левом хвосте колоколообразной функции плотности распределения.

1.2. Выборочные факты теории нечётких множеств и мягких вычислений

Когда в выборку попадают статистически неоднородные испытания, вероятностные распределения случайных величин не могут быть воспроизведены и оценены вполне корректно. Частотный смысл вероятностей пропадает, и к ним начинает примешиваться экспертная, оценочная составляющая. В исследованиях начинают применяться субъективные вероятности и вероятностные распределения, что снижает качество выводов, получаемых на этой информационной основе.

Раз вмешательство эксперта в оценивание данных становится неизбежным, то эта мысль, развитая до своего логического конца, приводит к следующему выводу. Необходимо моделировать не только объект научного исследования, но и познавательную активность эксперта – субъекта этого исследования. Когда эксперт в чём-то уверен, но не до конца, необходимо оценивать степень этой уверенности, чтобы оценить не только объект анализа, но и собственно процесс анализа, насколько он представляется достоверным. Если достоверности не хватает, от анализа и выводов на его основе следует отказываться.

Рассмотрим два типа множеств – счётное (дискретное) и несчётное (непрерывное). Для каждого из этих типов множеств можно ввести **функцию уверенности** эксперта в том, что данный элемент действительно принадлежит выбранному множеству. Для классических множеств такая функция является вырожденной: она равна единице, если элемент принадлежит множеству, и нулю, если не принадлежит. Классическими (чёткими) множествами, к примеру, являются множество натуральных чисел (счётное множество) или множество вещественных чисел (несчётное множество). Но если множество описано на естественном языке – например, «холодная погода» или «тяжёлый мешок», - то возникает проблема соотнести физические измерения температуры или веса с качественными характеристиками «холодный» и «тяжёлый» соответственно.

Именно этот принцип и лёг в основу теории нечётких множеств, разработанный в 1965 году американским учёным азербайджанского происхождения Лотфи А. Заде. Ему пришла в голову счастливая идея связать друг с другом физические измерения и качественные оценки уровня этих измерений, описанные на естественном языке. Так возник первый формализм теории нечётких множеств – **лингвистическая переменная** (ЛП). ЛП включает в себя следующие описания:

- носитель – чёткое счётное или несчётное множество объектов. В экономических задачах носитель – это, чаще всего, отрезок вещественной оси, отвечающий области определения некоторых количественных факторов;
- **терм-множество** – набор значений качественных характеристик носителя, образующий полную группу. Пример: Уровни факторов = {Очень Низкий, Низкий, Средний, Высокий, Очень Высокий};
- **набор функций принадлежности (ФП)** – функции, устанавливающие меру принадлежности того или иного значения носителя той или иной качественной характеристике (элементу терм-множества). Для условий предыдущего примера, таких функций ровно пять. Область значений ФП – единичный интервал [0,1].

Лингвистическая переменная может выступать в качестве **лингвистического классификатора**, если ставит своей целью достоверное распознавание качественных уровней факторов (**градаций**), с исключением конфликтов, порождаемых несовпадением экспертных суждений. Классификация может идти двумя путями:

- «жестким» («crisp»), когда между двумя качественными описаниями существует жёсткая граница. Тогда терм-множество становится вырожденным (чётким), а ФП приобретают прямоугольный вид;
- «мягким» («fuzzy»), когда граница между описаниями размыта, а уверенность эксперта в принадлежности носителя качественному уровню снижается до нуля, по мере удаления значений носителя от области максимальной экспертной уверенности в распознавании.

В последнем случае, ЛП должна удовлетворять условиям **серой шкалы Поспелова**. Свойство шкалы Поспелова в том, что тем же темпом, что идет убывание уверенности в принадлежности фактора той или иной градации, идет нарастание уверенности в принадлежности этого уровня к смежной градации. И пересечение линий уверенности происходит в точке, где функция принадлежности равна 0.5 (максимальная неуверенность в классификации). Классический вид серой шкалы Поспелова – набор трапециевидных функций принадлежности (см. пример 1.3).

Пример 1.3. Процедуру «мягкой» классификации можно продемонстрировать на примере фактора средневзвешенной стоимости капитала (WACC). Нормирование осуществляется не одним человеком, а экспертной комиссией, и сами нормативы – это результат согласованной работы такой комиссии. Процедура нормирования состоит из следующих основных этапов:

- Формируется зона абсолютного согласия по поводу того, какие уровни факторов безоговорочно попадают в те или иные градации, с чем согласны абсолютно все эксперты из комиссии. Результат экспертизы, например, следующий:
    - «красная зона» - WACC выше 10% годовых;
    - «желтая зона» - WACC от 6 до 8% годовых;
    - «зеленая зона» - WACC ниже 5% годовых.

  В этих выделенных интервалах функция принадлежности количественных уровней качественным градациям строго равна единице.

- Исследуются возникшие зоны неопределенности (например, прослойка между красной и желтой зонами – интервал от 8% до 10% годовых). Эксперты соглашаются с тем, что они не могут однозначно классифицировать такие состояния. И, по мере того, как растет уровень WACC, степень уверенности в принадлежности этого уровня к «красной зоне» плавно убывает от 1 (в точке WACC = 10% годовых) до нуля (в точке WACC=8% годовых). И теперь экспертам необходимо выработать заключение о характере такого спада (или, наоборот, роста).
- Самый простой путь признания – изначально согласиться с тем, что нормирование идет по правилам «серой шкалы» Поспелова.

Простейшая шкала Поспелова строится на трапециевидных функциях принадлежности (см. рис. 1.4), где рост/падение принадлежности совершается линейным темпом. На рисунке 1.4 показаны результаты «мягкого» нормирования (сплошные линии функции принадлежности) и «жесткого» нормирования (пунктирные линии). Попадание уровня фактора в зону неопределенности свидетельствует о необходимости изучать ситуацию более детально, соотнося уровень этого фактора с уровнями других факторов в модели управления предприятием. Непривычное направление оси абсцисс свидетельствует об инверсности фактора WACC: чем выше уровень WACC, тем хуже стороне, которая принимает капитал по этой ставке.

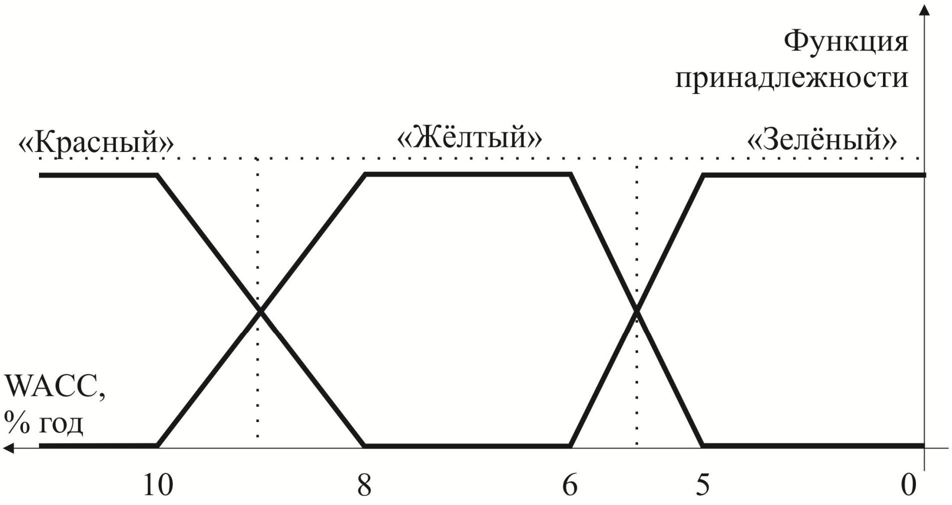


Рис. 1.4. Сопоставление «жесткого» и «мягкого» нормирования по фактору WACC

Введение лингвистических классификаторов позволяет решать широкий класс задач по распознаванию количественных уровней факторов и их нормированию. Сегодня принцип лингвистических распознавателей внедрён в большинстве нечётких контроллеров температуры, веса, давления. Т.е., этими устройствами оснащена львиная доля современных кондиционеров, стиральных машин, промышленных регуляторов (рынок на миллиарды долларов). Так что принцип нечётких множеств далеко вышел за пределы сугубо академического интереса.

В связи с нечёткими множествами возникает ещё один класс задач – моделирование оценочной неопределённости. Для этой цели весьма подходят формализмы, называемые **нечёткими числами**. Рассмотрим пример выражения «$x \approx a$». Что такое «приблизительно», каждый человек понимает по-своему, как и слово «счастье». Но есть высказывания, в которых мнение большинства совпадает. Например, высказывание типа «7 ≈ 20» 99% населения земного шара сочтут ложным. Если же *x* и *a* начнут сближаться, то уверенность в ложности высказывания начнёт снижаться, а обратная уверенность – расти. Наконец, истинность высказывания начнёт достигаться для случаев «7 ≈ 7.01», «7 ≈ 7.1» и им подобным по смыслу. Максимум уверенности будет достигнут в случае оценки «7 ≈ 7», а затем, по мере удаления от *a* вправо и влево, уверенность будет снижаться. Возникает унимодальная функция принадлежности, которая и есть нечёткое число. Максимуму принадлежности нечёткого числа отвечает ордината $\alpha = 1$ (вершина числа).

Наиболее ходовой разновидностью нечётких чисел являются **треугольные числа,** для которых степень экспертной уверенности снижается линейно до нуля, при движении вправо и влево от максимума принадлежности (рис. 1.5)

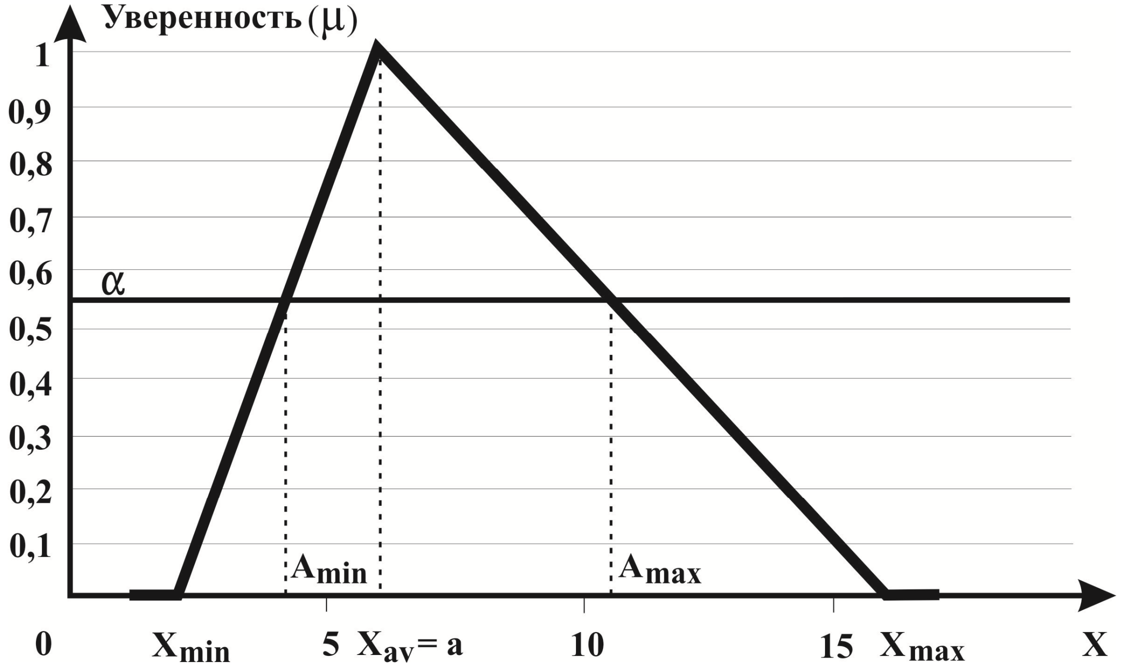


Рис. 1.5. Треугольное нечёткое число

Если зафиксировать уровень $\alpha < 1$ провести сечение нечёткого числа на этом уровне (как на рис. 1.5), то этому сечению будет отвечать **интервал принадлежности (сегментный интервал)** $[x_{min\alpha}, x_{max\alpha}]$ – проекция сечения на ось абсцисс. Любое нечёткое число может быть представлено набором своих интервалов принадлежности. Опыт показывает, что для отображения любого числа вполне достаточно точности в 11 сечений (дискрет 0.1 по уровню α, как на рисунке).

Пример 1.4. Любое треугольное число может быть задано абсциссами своих ключевых точек: абсциссой левой точки, абсциссой вершины и абсциссой правой точки. Возьмём треугольное нечёткое число X = (5, 7, 10). Задача: перейти от этого описания к набору из 11 сегментных интервалов принадлежности.

Решение. Зададим аналитический вид треугольного нечёткого числа X. Он представляет собой следующую запись для функции принадлежности:

$$\alpha = \begin{cases} 0, x < 5 \\ \frac{x-5}{7-5}, 5 \leq x < 7 \\ 1, x = 7 \\ \frac{10-x}{10-7}, 7 < x \leq 10, \\ 0, x > 10 \end{cases} . \qquad (1.20)$$

Если последовательно принять α = 0…1 с шагом 0.1 и выразить x через α с помощью (1.20), то результатом этой операции будет таблица 1.1 сегментных интервалов принадлежности. Формулы для расчёта границ сегментных интервалов: $x_{min\alpha} = 5 + 2\alpha$, $x_{max\alpha} = 10 - 3\alpha$.

Таблица 1.1. Набор сегментных интервалов принадлежности

α	$x_{min\alpha}$	$x_{max\alpha}$
0	5	10
0.1	5.2	9.7
0.2	5.4	9.4
0.3	5.6	9.1
0.4	5.8	8.8
0.5	6.0	8.5
0.6	6.2	8.2
0.7	6.4	7.9
0.8	6.6	7.6
0.9	6.8	7.3
1.0	7	7

Нечёткие числа – это математические объекты, с которыми можно оперировать (складывать их, вычитать, умножать на число и т.д.). Показано, что можно построить арифметику операций с нечёткими числами, основав её на операциях с сегментными интервалами принадлежности этих чисел. Впервые это было сделано в конце 70-х годов французскими учёными Дюбуа и Прадом. Таким образом, была заложена наука **мягких вычислений.**

Можно строго доказать, используя операции с сегментными интервалами, что сумма двух треугольных чисел – это треугольное число. Например, пусть X = (x_{min}, x_{av}, x_{max}), а Y = (y_{min}, y_{av}, y_{max}). Тогда, если Z = X + Y, то выполняется набор равенств:

$$z_{min} = x_{min} + y_{min},\ z_{av} = x_{av} + y_{av},\ z_{max} = x_{max} + y_{max}. \qquad (1.21)$$

И треугольное, и трапециевидные нечёткие числа относятся к более широкому классу **кусочно-линейных чисел** (числа BL-вида). Линейные операции с кусочно-линейными числами (сложение, вычитание и умножение на число) в результате дают также число BL-вида. Очень часто числа BL-вида применяются для оценки текущей цены портфелей, содержащих производные ценные бумаги. В настоящем пособии числа BL-вида применяются при оценке стоимости бизнеса.

1.3. Выборочные факты теории рисков

Понятие «риск» связывается, чаще всего, с негативными последствиями какого-либо события или решения. В этом отличие этого термина от понятия «шанс», несущего позитивную нагрузку. На ранних этапах становления теории рисков под риском понималось любое незапланированное отклонение от цели, в лучшую или худшую сторону. В экономике риск чаще всего ассоциировался с **волатильностью** цены активов, т.е. со случайным размером отклонения цен от своих трендов или средних значений, с колебаниями хозяйственного результата организации. Однако, благодаря работам Канемана и Тверски, научное сообщество уяснило, что оценка отклонений в плюс и в минус совершенно по-разному воспринимается инвестором; он гораздо более склонен переживать по поводу незапланированных убытков, чем радоваться нежданным прибылям.

Риск – это вероятность или возможность негатива, так он понимается в настоящем пособии. Что такое «негатив», каждый понимает по-своему. Но есть общее правило определения негатива: это уход в сторону от целевого ожидаемого уровня, и размер этого отклонения от цели превышает заранее установленный норматив. Норматив диктуется состоянием организации, объективными предпочтениями инвестора, динамикой рынков. Например, инвестор, вкладывая деньги в акции, рассчитывает на курсовой доход не хуже 20-30% годовых; в противном случае, он отнёс бы деньги в банк. Доходности там меньше, зато и рисков практически нет. Соответственно, 20% годовых может выступать в качестве нормативного значения, ниже которого наступает ситуация негатива.

Теперь надо разграничить понятия вероятности и возможности. Если оцениваемые события имеют частотный смысл, можно обсуждать вид закона вероятностного распределения. Если же нет надлежащей статистики, или нарушен принцип статистической однородности, мы уходим от понятия «вероятность» в принципе, замещая его термином «**возможность**». Возможность – это наши экспертные ожидания, выраженные количественно или качественно, с точностью до информационной ситуации, в которой мы находимся в момент оценки. Если уровень информационной неопределённости слишком высок, а получаемая статистика неоднородна, мы можем ограничиться качественными оценками возможности. Если же информационный массив подлежит первичной обработке, то мы можем перейти к количественной оценке возможности, прибегая к нечётким описаниям распределений событий (лингвистическим классификаторам, нечётким числам).

Пример 1.5. Пусть доходность акции – случайная величина с матожиданием 30% годовых и СКО 10% годовых. Норматив доходности, ниже которого фиксируется негатив – 20% годовых. Определить риск инвестора как полную вероятность наступления негативных сценариев.

Решение. В соответствии с данными примера 1.2 и формулой (1.19),

Risk = PrNeg = F(20% г.) = 0.16

Сам по себе уровень риска может быть нормирован, в ходе лингвистической классификации уровня. Здесь всё зависит от типа инвестора, от его инвестиционных предпочтений. Например, агрессивному инвестору, инвестирующему в производные ценные бумаги, уровень риска в 50% не представляется чрезмерным, потому что ожидаемая доходность по этим операциям может находиться в диапазоне 500-1000% годовых, т.е. заведомо выше рациональной нормы отдачи на инвестированный капитал. Наоборот, для консервативного инвестора уровень риска в 16% - достаточно высок, и он его принять не может. Как мы уже говорили, нормирование уровней риска может совершаться как жёстко, так и по мягкой схеме, с учётом неопределённости в экспертной оценке.

Перейдём теперь от рисков-вероятностей к рискам-возможностям.

Пример 1.6. Рассмотрим простейший пример оценки рисков в контексте неопределённости нефтегазовых запасов. Пусть запасы в месторождении оценены и представляют собой треугольное нечёткое число с координатами N = (min, av, max) по оси носителя - объёма запасов N. Выделим два уровня приемлемости:

- L1 < av – норматив приемлемости запасов по условиям экономически оправданного освоения. Если N < L1, то месторождение бесперспективно, и мы фиксируем ситуацию негатива;
- L2 > av – норматив приемлемости запасов по условию первоочередного освоения. Если N > L2, то месторождение осваивается в первую очередь в силу своей исключительной перспективности, и мы фиксируем ситуацию позитива.

Определить риск как возможность возникновения сценария неоправданного освоения месторождения.

Решение. В этом случае риск – это возможность того, что фактически обнаруженные запасы окажутся ниже нормативного уровня:

$$\mathrm{Risk} = \mathrm{Poss}\ \{N < L1\}. \qquad (1.22)$$

Оценка рисков для треугольных чисел осуществляется по хорошо известным формулам из **[11]**. Так, для риска справедливо:

$$\mathrm{Risk} = \begin{cases} 0, \quad \min > 0 \\ R \times (1 + \dfrac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \times \ln(1 - \alpha_1)), \quad \min \le 0 < av \\ 1 - (1 - R) \times (1 + \dfrac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \times \ln(1 - \alpha_1)), \quad av \le 0 < \max \\ 1, \quad \max \le 0 \end{cases}, \qquad (1.23)$$

где

$$R = \begin{cases} \dfrac{L1 - \min}{\max - \min}, \ \max > 0 \\ 1, \ \max \le 0 \end{cases}, \qquad (1.24)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, \ \min > 0 \\ \dfrac{L1 - \min}{av - \min}, \ \min \le 0 < av \\ 1, \ \ av = 0 \\ \dfrac{\max - L1}{\max - av}, \ \ av < 0 < \max \\ 0, \ \max \le 0 \end{cases}. \qquad (1.25)$$

Если треугольное число запасов N симметрично, то соотношения (1.23) – (1.25) упрощаются. При L1 < av выполняется:

$$Risk = \lambda + (1 - 2\lambda) * \ln(1 - 2\lambda)/2, \qquad (1.26)$$

где λ =(L1-min)/(max – min). При λ=0 Risk =0, а при λ=0.5 L1=av и Risk =0.5 (50%).

Пример 1.7. Известно min = 20, av = 40, max = 60, L1 = 30. Определить риск.

Решение. В соответствии с (1.26),

λ = (30-20) / (60 – 20) = 0.25, 1 - 2λ = 0.5,

Risk = 0.25 + 0.5*ln0.5 / 2 = 0.077 (8%).

Уровень риска как возможности также подлежит лингвистическому распознаванию. Можно построить риск-функцию Risk = Risk (L1), на основе исследования которой осуществить лингвистическую классификацию уровня риска. Простейший «crisp»-подход даёт:

- если риск меньше 10%, то он считается *приемлемым* (на уровне погрешности, неснижаемым). Это как раз результат примера 1.7;
- если риск составляет от 10% до 20%, то он является *пограничным.* Необходимо провести специальные дополнительные исследования, снять часть информационной неопределённости в части объёма запасов, чтобы довести уровень риска до приемлемого уровня;
- если риск больше 20%, то он неприемлем. И, если не предпринять качественного улучшения экономики проекта, месторождение осваивать нельзя.

Для оценки рисков по виду нечёткого числа, можно воспользоваться риск-калькулятором IRC (Investment Risk Calculator, разработчики

А. Недосекин и Д. Бессонов). Дистрибутив калькулятора расположен в открытом доступе [20] .

Пример 1.8. Пусть доходность актива r – прямоугольное нечёткое число – интервал r = [min, max] (вырожденный случай). Норматив неприемлемой доходности составляет L $\in$ [min, max]. Каков риск инвестора?

Решение. Выполняется формула:

$$\text{Risk} = \text{Poss}\ \{r < L\} = (L - \min) / (\max - \min). \quad (1.27)$$

В этом случае, риск растёт линейно от 0 до 1, по мере роста норматива L от min до max.

Выводы по разделу 1

Опыт преподавания дисциплины «Финансовая математика» показывает, что студенты 3-го курса экономической специальности очень быстро забывают специальные разделы высшей математики, которые им преподавали ещё полгода-год назад. Здесь сказывается элементарное отсутствие опыта применения вероятностных описаний в практических задачах. Поэтому повторное конспективное изложение базовых основ теории вероятности представляется совершенно нелишним.

Что же касается теории нечётких множеств и мягких вычислений, то соответствующие разделы вообще выпадают из программ обучения. С позиций современного состояния экономической науки, такое положение дел представляется архаичным и подлежит исправлению. Ведь именно нечётко-множественные модели создают разумную альтернативу вероятностным описаниям, дополняют их в тех случаях, когда исследуемые события не обладают свойствами массовости и статистической однородности.

Теория экономических рисков также не преподаётся как обособленный предмет. Поэтому авторами настоящего учебного пособия было принято решение начать пособие с изложения основных вариантов моделирования экономических рисков, в предположении вероятностной, интервальной и нечётко-множественной парадигм анализа рисков.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое вероятность, и чем она отличается от возможности?
2. Что такое ряд распределения, плотность распределения, функция распределения?
3. Как перейти от дискретного описания вероятностного пространства к непрерывному?
4. Что такое начальные / центральные моменты распределения?
5. Как формулируется плотность нормального закона вероятностного распределения? Когда это распределение вырождается в дельта-функцию Дирака, а когда – в винеровский белый шум?
6. Что такое лингвистическая переменная? Чем она отличается от лингвистического классификатора:
7. Что такое нечёткие числа?
8. Что такое мягкие вычисления? Приведите пример перемножения двух интервалов.
9. Что такое сегментный интервал принадлежности?
10. Что такое кусочно-линейное нечёткое число? Какие виды нечётких чисел относятся к этому типу?
11. Что такое риск, и чем он отличается от шанса?

РАЗДЕЛ 2. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТРИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ

2.1. Проценты и процентные ставки

Теперь, когда специальные математические вопросы освещены, можно приступать к изложению основной темы курса – коммерческие расчёты между кредиторами и должниками. Расчёты с известными параметрами возникают между сторонами гражданского права в тех случаях, когда они носят характер безусловного обязательства платить оговорённые суммы в оговорённые сроки, что по характеру представляет собой вид кредитного обязательства. Поэтому, без нарушения общности, можно говорить о коммерческих расчётах между кредитором и должником. На размер выплат могут влиять внешние макроэкономические условия (например, темп инфляции); если в номинальном выражении сумма выплат останется прежней, то в реальном выражении она может значительно снизиться. Также на размер выплат влияет уровень налоговых ставок, который тоже может меняться во времени.

Начать изложение надо с процентов, поскольку все выплаты от заёмщика к кредитору превышают предыдущие обратные платежи (обладают выгодой для кредитора). В финансовых расчетах под **процентами** или **процентными деньгами** понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг. При заключении финансовых соглашений стороны договариваются о размере процентной ставки. **Процентной ставкой** называют отношение дохода (процентных денег) к сумме долга (капитала) за фиксированный промежуток времени. Она измеряется или десятичной (обыкновенной) дробью или в процентах. Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называется **периодом начисления**. В качестве периода принимают год, полугодие, квартал, месяц, день. Обычно имеют дело с годовой процентной ставкой, а процентные ставки за другие периоды вычисляются пересчетом годовой. Например, если годовая процентная ставка 12 %, то полугодовая процентная ставка будет 6 %, квартальная процентная ставка – 3 %.

Процесс увеличения суммы денег во времени путем присоединения процентов называют **наращением** или **накоплением.**

Пример 2.1. Допустим, что первоначальная сумма 100 000 руб. за 3 месяца выросла до 106 000 руб. Найти: квартальные, ежемесячные и годовые процентные ставки.

Решение. Проценты составляют 106 000 - 100 000 = 6 000 руб., процентная ставка за квартал 6 000 / 100 000 = 6%, процентная ставка за 1 месяц – 6%/3 месяца = 2%, годовая процентная ставка – 24 % .

2.2. Наращение по простой процентной ставке

Расчет сумм по простой процентной ставке заключается в том, что за **каждый период начисления** процентные деньги начисляются от **первоначальной** суммы (т. е. процентные деньги за каждый период начисления одни и те же).

Обозначения:

P – первоначальная сумма, т. е. сумму денег, получаемых заемщиком,

i – процентная ставка за период (десятичная дробь),

n – срок ссуды (количество периодов начисления процентов),

I– проценты (процентные деньги),

S – наращенная сумма, т.е. сумма денег с процентами.

Рассмотрим несколько вариантов расчётов.

Вариант 1 (дискретное время). Пусть срок ссуды n – целое число. Тогда по истечении срока ссуды кредитор получает сумму

$$S = P\,(1 + n \cdot i). \qquad (2.1)$$

Процентные деньги будут равны $I = P\,n \cdot i$.

Вариант 2 (непрерывное время). Если ссуда взята на n дней, то срок ссуды нужно выразить в долях года. Пусть символ K обозначает временную базу начисления процентов. При расчете обыкновенных процентов временная база K = 360 дней в году (12 месяцев по 30 дней), а при расчете точных процентов K = 365 или 366 дней в году.

Обозначая через t = n/K долю года, сумму долга можно рассчитать по формуле

$$S = P\,(1 + t\,i). \tag{2.2}$$

Выражение $(1 + t \cdot i)$ называется коэффициентом наращения. Процентные деньги будут равны $I = P\,t \cdot i$**.**

Пример 2.2. Сумма в 700 тыс. руб. помещена в банк на депозит (хранение под проценты) на 4 года под 2 % годовых. Найти сумму в конце срока, если простые проценты начисляются:

- в конце каждого года;
- в конце каждого квартала.

Решение. Из условий задачи следует, что

первоначальная сумма P =700 000,

годовая процентная ставка $i = 0.02$,

срок ссуды $n = 4$.

Тогда по формуле (2.1) получим сумму вклада при начислении процентов в конце каждого года

$$S = P\,(1 + n \cdot i) = 700\,000\,(1 + 4{*}0.02) = 756\ \ 000 \text{ руб.}$$

Процентные деньги $I = P\ n \cdot i$ = 700 000*4*0.02 = 56 000 руб. определяют вознаграждение, получаемое вкладчиком.

Для определения суммы вклада при начислении процентов в конце каждого квартала вычислим процентную ставку за квартал

$$i\,/\,4 = 0.02/4 = 0.005$$

Срок депозита равен n= 16 кварталов. Тогда по формуле (2.2) получим сумму вклада

$$S = 700\,000 * (1{+}16{*}0.005) = 756\ \ 000 \text{ руб.}$$

Именно этим и обуславливается различие между простой и сложной процентными ставками. В случае простой процентной ставки не имеет значения, в какие периоды платятся проценты; их совокупная масса I остаётся одной и той же для любых периодов и порядков выплат, обладающих равной временной длительностью.

2.3. Наращение по сложной процентной ставке

Расчет сумм по сложной процентной ставке заключается в том, что за каждый период процентные деньги начисляются от всей накопленной к этому моменту суммы.

Вариант 1. Пусть срок ссуды ***n* – целое число**. Тогда по истечении срока ссуды кредитор получает сумму

$$S = P\,(1 + i)^{n}. \qquad (2.3)$$

Вариант 2. Если срок ссуды равен ***t*** (***t*** – доля года), то обобщая формулу (2.3), сумму долга рассчитывают по формуле

$$S = P\,(1 + i)^{t}. \qquad (2.4)$$

Коэффициент наращения в данном случае равен $(1+i)^{t}$, а процентные деньги за весь срок ссуды равны

$$I = [(1 + i)^{t} - 1]\,P.$$

Вариант 3. Пусть годовая процентная ставка равна ***j*** и начисление процентов производится ***m* раз в году.** Тогда за ***n*** лет проценты начисляются $m*n$ раз по процентной ставке $j\ /\ m$**.** Формула наращения будет иметь вид

$$\mathrm{S = P*(1+i/m)^{nm}}\ . \qquad (2.5)$$

Вариант 4. Непрерывное начисление процента. Если число начислений процентов ***m*** стремится к бесконечности, то из формулы (2.5), последовательно приближая степень к бесконечности, а выражение под знаком степени к единице, получаем формулу для непрерывного начисления процентов как предел по Лопиталю:

$$S = P*e^{\,in}. \qquad (2.6)$$

Чтобы отличить ставку непрерывного процента от дискретной ставки j, ее называют силой роста и обозначают δ.

Пример 2.3. Кредит в 10 000 долларов предоставлен на два года под 12 % годовых. Найти сумму долга

1) с ежегодным начислением сложных процентов;

2) с ежеквартальным начислением сложных процентов;

3) с ежедневным начислением сложных процентов.

Решение.

Для решения первой части задачи используем формулу (2.3). Полагаем $P = 10\ 000$, $i\ \% = 12\ \%$, $n = 2$ года, период начисления процентов – один год. Тогда сумма, возвращаемая кредитору, будет равна:

$$S = 10\ 000\ (1 + 0.12)^2 = 10\ 000\ (1.12)^2 = 12\ 544.$$

Для решения второй части задачи используем формулу (2.5) с значением $m = 4$, так как начисление процентов производится поквартально. Следовательно, процентная ставка за период начисления процентов (квартал), равна 12%/4 = 3%, число периодов начисления процентов $n*m$=2*4=8.

Тогда сумма, возвращаемая кредитору, будет равна:

$$S = 10\ 000\ (1 + 0.03)^8 = 10\ 000*1.26677 = 12\ 667.$$

Для решения третьей части задачи сначала используем формулу (2.5) со значением $\boldsymbol{m} = 365$, так как начисление процентов производится ежедневно. Следовательно, процентная ставка за период (один день) равна 12% / 365 = 0.0329% в сутки, а число периодов начисления процентов $\boldsymbol{nm} = 2 \cdot 365 = 730$.

Тогда сумма, возвращаемая кредитору, будет равна:

$$S = 10\ 000\ (1 + 0.00329)^{730} = 12\ 711.99.$$

Теперь найдем сумму долга, используя формулу непрерывного начисления процентов (2.6) при n = 2, i = 0.12:

$$S = P\,e^{\,in} = 10\ 000*\,e^{0{,}12\cdot 2} = 10\ 000*1.271249 = 12\ 712.49.$$

В повседневной практике коммерческих расчётов непрерывное начисление процентов не используется (является разновидностью грабежа заёмщика, о чём обе стороны в расчётах превосходно отдают себе отчёт).

Чем чаще взимаются проценты, тем больше их объём (при прочих равных условиях).

2.4. Переменные процентные ставки

Формулы наращенных сумм для простых и сложных процентов предполагают постоянную процентную ставку в течение всего срока ссуды.

Пусть ставка процента изменяется k раз, и t_1, t_2 ,...,t_k обозначают промежутки времени (в долях года), в течение которых действовали постоянные ставки i_1, i_2, ..., i_k .

Тогда наращенная сумма по схеме простых процентов определяется по формуле:

$$S = P\,(1 + t_1 i_1 + t_2\, i_2 + \ldots + t_k\, i_k) \quad . \qquad (2.7)$$

Аналогичным образом определяется формула для сложных процентов

$$S = P*(1+i_1)^{t1}**(1+i_2)^{t2}*\ldots**(1+i_k)^{tk} \qquad (2.8)$$

Пример 2.4. Вкладчик положил в банк 20 000 на 4 года под 10% годовых. Согласно контракту, банк имеет возможность изменить процентную ставку в зависимости от ставки рефинансирования Банка России. Поэтому через три года с момента открытия вклада банк изменил процентную ставку на 9 %. Какие суммы получит вкладчик при начислении простых и сложных процентов?

Решение. Из условий следует: P = 20 000 руб., i_1 = 10 %, t_1 = 3 года, i_2 = 9 %, t_2 = 1 год. По формуле (2.7) получаем сумму вклада через 4 года для схемы простых процентов

$$S = 20\,000*(1 + 0.1*3 + 0.09) = 20\,000 * 1.2 = 24\,000.$$

По формуле (2.8) получаем сумму вклада через 4 года для схемы сложных процентов

$$S = 20\,000*(1 + 0.1)^3*(1 + 0.09)^1 = 20\,000 \cdot 1{,}331 \cdot 1.09 =29\,015.8\ .$$

2.5. Дисконтирование по простой процентной ставке

Дисконтирование позволяет учитывать в финансовых операциях фактор времени. Различают математическое дисконтирование и коммерческий (или банковский) учет.

Простейшую задачу математического дисконтирования можно сформулировать так: определить какую сумму ***P*** нужно поместить в банк под ***i*** процентов годовых, чтобы через ***n*** лет получить сумму, равную ***S***.

Сумма ***P*** называется **современной или приведенной стоимостью.** Из формулы (2.1) наращенной суммы по простой процентной ставке $S = P\,(1 + n \cdot i)$ найдем приведенную (современную) стоимость ***P***:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot n}. \tag{2.9}$$

Если срок ссуды *t* выражается в долях года, приведенная (современная) стоимость по простой процентной ставке:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot t}. \tag{2.10}$$

2.6. Дисконтирование по сложной процентной ставке

Из формулы (2.3) вычисления наращенной суммы по сложной процентной ставке $S = P*(1+ i)^{n}$ найдем приведенную (современную) стоимость ***P***:

$$P = \frac{S}{(1 + i)^{n}}. \tag{2.11}$$

Коэффициент $\frac{1}{(1 + i)^{n}}$ называется **фактором дисконтирования** или дисконтным множителем.

Если срок ссуды *t* выражается в долях года, то приведенная (современная) стоимость для сложной процентной ставки имеет вид

$$P = \frac{S}{(1+i)^t}. \qquad (2.12)$$

Пример 2.5. Какую сумму следует поместить на 4 года под 10 % годовых для накопления суммы 1 000 000 руб.? Провести расчеты по схемам простых и сложных процентов.

Решение. Из условия задачи следует: n = 4, i = 10 %, S = 1 000 000 руб. По формулам (2.11) и (2.12) получаем современные стоимости для простых и сложных процентов:

P = S / (1 + i*t) = 1 000 000 / (1 + 0.1 *4) = 714 286.

P = S / (1 + i)n = 1 000 000 | (1 + 0.4)4 = 683 013.

Видно, что при начислении сложных процентов современная стоимость будет всегда меньше, чем для случая начисления простых процентов.

2.7. Непрерывное дисконтирование

Пусть годовая процентная ставка равна j и начисление процентов производится m раз в году. Тогда за n лет проценты начисляются $m*n$ раз по процентной ставке j / m. Формула для приведенной стоимости будет иметь вид

$$P = \frac{S}{(1+ j/m)^{nm}}. \qquad (2.13)$$

Если число начислений процентов m стремится к бесконечности, то из формулы (2.13) получаем формулу для непрерывного дисконтирования

$$P = S * e^{-jn}. \qquad (2.14)$$

2.8. Банковский учёт векселей

Банковский учёт заключается в получении банком денежных обязательств, например, векселя, по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы. В этом случае говорят, что вексель учитывается, и клиент получает сумму $\boldsymbol{P = S - D}$, где $\boldsymbol{S}$ – номинальная сумма данного обязательства, ***P*** – цена покупки векселя банком, ***D*** – дисконт или сумма процентных денег (доход банка).

Процентный доход получателя векселя может определиться по **простой годовой учетной ставке (ставке дисконта**) как отношение процентных денег к номинальной сумме d = D / S. Если время от даты учета до даты погашения долга будет составлять долю года ***t***, то дисконт определяется по формуле

$$D = t * d * S, \qquad (2.15)$$

где d – величина простой учетной ставки. Предъявителю учитываемого векселя будет выдана сумма

$$P = S – D = S * (1 – t*d). \qquad (2.16)$$

Пример 2.6. Клиент обратился в банк за кредитом в 150 000 руб. под залог акций сроком на полгода. Определить сумму, которую он получит, если банк предлагает простую годовую учетную ставку в 5 %.

Решение. Из условия задачи следует, что S = 150 000, d = 0.05, t = 0.5. Тогда по формуле (2.16) рассчитаем сумму, получаемую клиентом:

$$P = S* (1 – t*d) = 150\,000(1 – 0.5*0.05) = 146\,250.$$

Дисконт (доход банка) будет равен

$$D = t \cdot d \cdot S = 0.5 * 0.05 \cdot 15000 = 3\,750.$$

2.9. Номинальная и эффективная ставки

Пусть годовая процентная ставка равна j и период начисления m раз в году. Следовательно, каждый раз проценты начисляются по ставке j / m. Ставку j называют номинальной.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и ***m***-разовое начисление процентов по ставке j / m. Обозначая через i эффективную ставку.

Из определения следует равенство коэффициентов наращения

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} . \qquad (2.17)$$

Если известна номинальная ставка *j*, то из (2.17) следует формула для определения эффективной ставки

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 . \qquad (2.18)$$

Если известна эффективная ставка *i*, то из (2.18) следует формула для определения номинальной ставки

$$j = m\left((1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) . \qquad (2.19)$$

При $m > 1$ эффективная ставка больше номинальной ставки.

Пример 2.7. Номинальная ставка 25 % применяется ежемесячно в течение года. Найти размер эффективной ставки.

Решение. Полагая в формуле (2.18) $m = 12$, $j = 0{,}25$, получим:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0.2807 .$$

Таким образом, начисление процентов по ставке 28.07 % один раз в году дает такой же результат, что и начисление процентов по ставке 25 % ежемесячно.

Пример 2.8. Эффективная ставка равна 28 %. Найти размер номинальной ставки, если начисление процентов производится в конце каждого полугодия, 2 раза в год.

Решение. По формуле (2.19) получаем при $m = 2$, $i = 0.28$

$$j = 2(\sqrt{1{,}28} - 1) = 0.26 .$$

Таким образом, начисление процентов по ставке 28 % один раз в году дает такой же результат, что и начисление процентов по ставке 26 % два раза в году.

2.10. Эквивалентность денежных сумм

Если, например, нужно перенести срок денежного обязательства или объединить несколько платежей в один, то встает вопрос о принципе изменения контрактов. Таким принципом является финансовая эквивалентность обязательств.

Уравнение эквивалентности для двух платежей в различные моменты времени можно составить приведением обоих платежей к общему моменту времени.

Денежная сумма S_1 в момент времени t_1 эквивалентна по ставке сравнения i денежной сумме S_2 в момент времени t_2 ($t_2 > t_1$), если современные значения обоих платежей равны.

Отсюда следует, что эквивалентность означает равенство

$$\frac{S_1}{1+it_1} = \frac{S_2}{1+it_2} \tag{2.20}$$

при начислении простых процентов и – равенство

$$\frac{S_1}{(1+i)^{t_1}} = \frac{S_2}{(1+i)^{t_2}} \tag{2.21}$$

при начислении сложных процентов.

Пример 2.9. Проверить эквивалентность двух денежных сумм: S_1 =500 тыс. руб. через t_1 = 4 года и S_2 =600 тыс. руб. через t_2 = 6 лет, если сложная ставка сравнения 10 %.

Решение. Найдем современное значение $\boldsymbol{S_1}$ =500:

$$P_1 = \frac{S_1}{(1+i)^{t_1}} = \frac{500}{(1+0{,}1)^4} = 500 \cdot 0.683013 = 341.51\ .$$

Найдем современное значение $\boldsymbol{S_2}$ =600:

$$P_2 = \frac{S_2}{(1+i)^{t_2}} = \frac{600}{(1+0{,}1)^6} = 600{*}0.564474 = 338.68\ .$$

Отсюда следует, что указанные суммы не являются эквивалентными при ставке сравнения 10 %: доход S_1 = 500 тыс. руб. через 4 года выгоднее, чем доход S_2 = 600 тыс. руб. через 6 лет.

2.11. Начисления простых процентов с учетом налогов

Учет налогов уменьшает полученную вкладчиком наращенную сумму. Обозначения:

P – первоначальную сумму вклада;

n – срок вклада;

S – наращенную сумму до выплаты налогов;

C – наращенную сумму после выплаты налогов;

g – ставку налога на проценты;

G – общую сумму налога.

Общая сумма налога G равна g процентов от процентных денег I

$$G = (S - P)^* g = P *n* g* i. \qquad (2.22)$$

Тогда наращенная сумма после выплаты налогов C будет равна

$$C = S- G= P [1 + n *(1 - g) *i], \qquad (2.23)$$

т.е. для получения реального наращения нужно процентную ставку i заменить на процентную ставку $(1 – g)* i$.

2.12. Начисления сложных процентов с учетом налогов

При долгосрочных операциях начисление налога производится на сложные проценты. Здесь возможны два варианта: налог начисляется на всю сумму процентов сразу и последовательно в конце каждого года.

В первом варианте расчёта общая сумма налога будет равна:

$$G = (S - P)\, g = P[\, (1 + i)^n -1]*g. \qquad (2.24)$$

Тогда наращенная сумма после выплаты налогов составит

$$C = P[(1 - g)*(1 + i)^n + g]. \qquad (2.25)$$

Во втором варианте расчёта сумма налога начисляется за каждый год. Налог $\boldsymbol{G_t}$ за год $\boldsymbol{t}$ рассчитывается по формуле:

$$G_t = (S_t - S_{t\text{-}1})\, g = P*(1+i)^{t\,\text{-}1}*i*g. \qquad (2.26)$$

За весь срок налог равен сумме налогов за каждый год

$$G = \sum_{t=1}^{n} G_t\,. \qquad (2.27)$$

Пример 2.10. Пусть первоначальная сумма вклада P = 100 000 руб., срок вклада n = 3 года; процентная ставка i = 10 %. Определить размеры налога на проценты при начислении простых и сложных процентов при ставке налога 5 %.

Решение.

Вариант 1. Схема начисления простых процентов.

Наращенная сумма без налога $S = P\,(1 + n\,i) = 100\,000\,(1 + 3 * 0.1) = 130\,000.$

Общая сумма налога по (2.22):

$$G = (S - P)\, g = (130\,000 - 100\,000)\, *0.005 = 1\,500.$$

Тогда наращенная сумма после выплаты налогов будет равна по (2.23)

$$C = S - G = 130\,000 - 1\,500 = 128\,500.$$

Вариант 2. Схема начисления сложных процентов.

Наращенная сумма без налога

$$S = P\,(1 + i)^{\,m} = 100\,000\,(1 + 0.1)^3 = 133\,100.$$

Вариант 2.1 расчёта. Налог на всю сумму процентов равен, в соответствии с (2.24)

$$G = (S - P)\, g = (131\,445 - 100\,000) * 0.05 = 1\,655.$$

Тогда наращенная сумма после выплаты налогов будет равна по (2.25)

$$C = (S - G) = 133\,100 - 1\,655 = 131\,445.$$

Вариант 2.2 расчёта.

Выплата налога в конце каждого года.

За первый год **t** = 1 выплачивается налог по (2.26)

$$G_1 = P\,(1 + i)^{1-1}\, i\, g = 100\,000 * 0.1 * 0.05 = 500.$$

За второй год **t** = 2 выплачивается налог

$$G_2 = P(1 + i)^{2-1}\, i\, g = 100\,000 * 1.1 * 0.1 * 0.05 = 550.$$

За третий год **t** = 3 выплачивается налог

$$G_3 = P(1 + i)^{3-1}\, i\, g = 100\,0001.1^2 * 0.1 * 0.05 = 605.$$

За весь срок налог равен

$$G = 500 + 550 + 605 = 1655.$$

Тогда наращенная сумма после выплаты налогов будет равна по (2.27)

$$C = (S - G) = 133\,100 – 1\,655 = 131\,445.$$

Разумеется, полученные результаты по вариантам 2.1 и 2.2 расчётов не совпадают.

2.13. Темп инфляции. Наращение с учетом инфляции

В рассмотренных выше методах наращения не учитывалось снижение покупательной способности денег за период их наращения.

Обозначения:

n – срок ссуды;

S – наращенная сумма денег, измеренную по номиналу;

C – наращенная сумма денег с учетом инфляции.

Индекс цен J_p показывает, во сколько раз изменились цены за период наращения.

Темпом инфляции h называется относительный прирост цен за рассматриваемый период:

$$h = J_p – 1;\; J_p = 1 + h. \qquad (2.28)$$

Например, если темп инфляции за период составляет 50 %, то $J_n = 1.5$. Индекс цен за n периодов равен произведению индексов цен за каждый период:

$$J_p = \prod_{t=1}^{n} (1 + h_t) \quad . \tag{2.29}$$

Если темп инфляции – постоянный и равен h, то

$$J_p = (1 + h)^n \quad . \tag{2.30}$$

Обозначения:

n – срок ссуды;

S – наращенная сумма денег, измеренную по номиналу;

C – наращенная сумма денег с учетом инфляции.

Тогда наращенная сумма денег с учетом инфляции:

$$C = \frac{S}{J_p} \quad . \tag{2.31}$$

Вариант 1. Для схемы наращения по простым процентам имеем

$$C = \frac{P(1 + in)}{J_p} \tag{2.32}$$

и при неизменном темпе инфляции:

$$C = P \frac{(1 + in)}{(1 + h)^n} \quad . \tag{2.33}$$

Если процентная ставка

$$i = \frac{J_p - 1}{n}, \tag{2.34}$$

наращение компенсирует инфляцию и $C = P$.

Если процентная ставка

$$i < \frac{J_p - 1}{n}, \qquad (2.35)$$

наращение будет меньше инфляции и $C < P$.

Если процентная ставка

$$i > \frac{J_p - 1}{n}, \qquad (2.36)$$

наращение будет больше инфляции и $C > P$.

Вариант 2. Для схемы наращения по сложным процентам имеем

$$C = \frac{P(1+i)^n}{J_p}, \qquad (2.37)$$

и при неизменном темпе инфляции:

$$C = P\,\frac{(1+i)^n}{(1+h)^n}. \qquad (2.38)$$

Если темп инфляции равен процентной ставке $h = i$, то наращение будет поглощаться инфляцией и $C = P$.

Если темп инфляции больше процентной ставки $h > i,$ то наращение будет меньше инфляции и $C < P$.

Если темп инфляции меньше процентной ставки $h < i,$ то наращение будет больше инфляции и $C > P$.

Пример 2.11. В банк положили сумму 150 000 руб. на 3 месяца. Найти сумму вклада и процентные деньги при начислении простых процентов со ставкой 12 % годовых. Найти наращенную сумму с учетом темпа инфляции $h = 0.5$ % в месяц.

Решение. Найдем наращенную сумму вклада без учета инфляции по формуле:

$$S = P\,(1 + i \cdot m\,/12) = 150\,000\,(1{+}0.12{\cdot}3/12) = 154\,500.$$

Индекс цен равен по (2.30)

$$J_p = (1 + h)^n = (1 + 0{,}05)^3 = 1.015.$$

Тогда наращенная сумма с учетом инфляции равна по (2.31)

$$C = S\,/\,J_p = 154\,500\;/\;1.015 = 152\,205.$$

Пример 2.12. В банк положили сумму 150 000 руб. на 2 года. Найти сумму вклада и процентные деньги при начислении сложных процентов со ставкой 12 % годовых. Найти наращенную сумму с учетом темпа инфляции 0.5 % в год.

Решение. Найдем наращенную сумму вклада без учета инфляции по формуле:

$$S = P\,(1 + i)^n = 150\,000\,(1 + 0{,}12)^{\,2} = 188\,160.$$

Индекс цен равен

$$J_p = (1 + h)^n = (1{+}0{,}05)^2 {=} 1.01.$$

Тогда наращенная сумма с учетом инфляции равна

$$C = S\,/\,J_p = 188\,160\;/\;1.01 = 186\,292.$$

2.14. Брутто-ставка. Реальная ставка процентов

Чтобы компенсировать обесценивание денег, увеличивают ставку процента, которую называют **брутто-ставкой,** которую обозначим ***r***.

Для простых процентов брутто-ставку *r* находим из равенства:

$$\frac{1 + nr}{J_p} = 1 + ni\,\cdot \qquad (2.39)$$

Отсюда:

$$r = \frac{(1 + ni)J_p - 1}{n}. \qquad (2.40)$$

Если темп инфляции равен *h*, то для сложных процентов брутто-ставку ***r*** находим из равенства:

$$\frac{1 + r}{1 + h} = 1 + i \qquad (2.41)$$

Отсюда:

$$r = i + h + i*h. \qquad (2.42)$$

Величина (h+i*h) называется **инфляционной премией**.

Если объявлена **брутто-ставка *r,*** то реальная процентная ставка при начислении простых процентов определяется формулой:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + nr}{J_p} - 1\right), \qquad (2.43)$$

а при начислении сложных процентов – формулой:

$$i = \frac{r - h}{1 + h}. \qquad (2.44)$$

Выводы по разделу 2

Наращение и дисконтирование денежных сумм – это способ учёта фактора стоимости денег во времени. Наращение анализируется в случаях возникновения долговых обязательств, когда кредитор получает от заёмщика не только сумму долга, но и накопленные в рамках долгового обязательства проценты. Дисконтирование денежных потоков возникает в связи с инфляционным обесценением будущих поступлений и платежей, а также в связи с риском неполучения (или невыплаты) ожидаемых денежных сумм, в связи с изменением условий хозяйствования. Простейший инструмент анализа – постоянные ставки наращения и дисконтирования потоков, которые, впрочем, могут изменять свой размер от периода к периоду.

Объём наращенных или дисконтированных сумм существенно зависит от периодичности начисления платежей. Чем чаще начисляются сложные проценты, тем выше сумма наращения (дисконтирования). В традиционной банковской практике интервал наращения процентов на долг – один месяц. С этой точки зрения, банковское кредитование является более дорогой разновидностью долга, чем, например, облигации с полугодовым купоном, при той же номинальной процентной ставке. Впрямую периодичность начисления процентов при наращивании и дисконтировании определяет различие между минимальной и эффективной процентными ставками.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется периодом начисления?
2. Чему равна временная база начисления обыкновенных процентов?
3. Чему равен коэффициент наращения сложных процентов?
4. Чему равны процентные деньги при начислении простых процентов?
5. Чему равны процентные деньги при начислении сложных процентов?
6. Чему равна современная стоимость при начислении простых процентов?
7. Чему равна современная стоимость при начислении сложных процентов?
8. Дайте определения номинальной и эффективной ставок.
9. Чему равна наращенная сумма после выплаты налогов при начислении простых процентов?
10. Чему равна наращенная сумма после выплаты налогов при начислении сложных процентов?
11. Дайте определения индекса цен и темпа инфляции.
12. Чему равна наращенная сумма денег при начислении простых процентов при неизменном темпе инфляции?
13. Чему равна наращенная сумма денег при начислении сложных процентов при неизменном темпе инфляции?
14. Чему равна брутто-ставка при начислении простых процентов?
15. Чему равна брутто-ставка при начислении сложных процентов?
16. Чему равна реальная ставка при начислении сложных процентов?

РАЗДЕЛ 3. ПОТОКИ ПОСТУПЛЕНИЙ И ПЛАТЕЖЕЙ (РЕНТЫ)

3.1. Финансовые ренты. Ось поступлений и платежей

Финансово-банковские операции обыкновенно предполагают не разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени.

Поток платежей – это последовательность значений самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществляются. Предполагается, что ставка процента i остается неизменной в течение всего потока. Поток платежей обозначим

$$R = \{R_k, t_k\},$$

где R_k – платежи в момент времени t_k.

Платеж со знаком + означает доход, а платеж со знаком – означает затраты или инвестиции.

Поток платежей с постоянными промежутками между ними называется **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

$\boldsymbol{R_j}$ – величина отдельного платежа;

$\boldsymbol{\tau}$ – временной интервал между двумя платежами (период ренты);

$\boldsymbol{n}$ – время между первым и последним платежами (срок ренты);

$\boldsymbol{i}$ – процентная ставка для расчета наращения или дисконтирования платежей (ставка приведения);

$\boldsymbol{p}$ – число выплат в году;

$\boldsymbol{m}$ – число начислений процентов в году;

$\boldsymbol{S}$ – наращенная сумма ренты (будущая стоимость ренты);

$\boldsymbol{P}$ – современная или приведенная стоимость ренты.

По числу выплат за год ренты делят на **годовые** и ***p*-срочные**. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами платежей.

Если члены ренты равны $\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R_2} \ldots = \boldsymbol{R_n} = \boldsymbol{R}$, то ренту называют **постоянной**. По моменту выплат различают ренты **постнумерандо** (обычная), в которых платежи осуществляются в конце соответствующих периодов, и **пренумерандо**, в которых платежи производят в начале указанных периодов.

Различают **верные ренты** и **условные ренты.** Верные ренты подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита**.** Выплата условной ренты зависит от наступления некоторого случайного события, например страховые ренты.

По началу срока ренты делят на **немедленные** и **отсроченные.** Примером отсроченной ренты может служить погашение кредита частями после льготного периода.

В ряде случаев при анализе ренты целесообразно применять такой приём, как графическое отображение оси выплат (см. рис. 3.1).

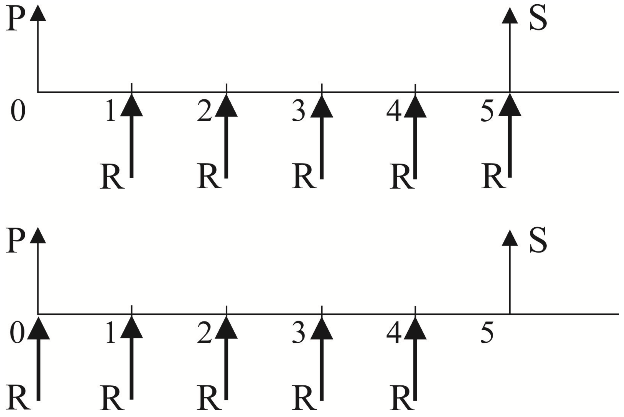


Рис. 3.1. Ось поступлений и платежей (случаи постнумерандо и пренумерандо)

С самого начала надо оговорить, какому субъекту отношений принадлежит ось. Если стрелки выплат направлены в сторону оси, они называются **поступлениями** противоположной стороны в пользу субъекта. Если стрелки выплат направлены от оси, они называются **платежами** субъекта в пользу противоположной стороны. Также на оси уместно показать моменты выплат и названия соответствующих поступлений и платежей. Уместно учитывать знак: поступления в модели целесообразно брать с плюсом, а платежи – с минусом. Тогда результат будет синхронизирован со значениями, выдаваемыми стандартными финансовыми функциями Excel.

3.2. Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо

Рассмотрим случай потока ежегодных платежей ***R*** с начислением процентов **в конце каждого года (постнумерандо)** по сложной процентной ставке.

Сумма первого платежа S_1 с наращенными на него за весь срок процентами равна

$$S_1 = R\cdot(1 + i)^{n - 1},$$

где n – количество платежей величиной R.

Для второго платежа, соответственно получим

$$S_2 = R\cdot(1 + i)^{n - 2}.$$

Очевидно, что для последнего платежа проценты не начисляются:

$$S_n = R\cdot(1 + i)^{0} = R.$$

Тогда для наращенной суммы ренты получим

$$S = R\,(1 + i)^{n - 1} + R\,(1 + i)^{n - 2} + ... + R.$$

Следует отметить, что сумма S представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии с первым членом R и знаменателем $q = (1 + i) > 1$. Тогда для суммы ренты постнумерандо получим формулу

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (3.1)$$

Величина

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (3.2)$$

называется **коэффициентом наращения ренты.** Схема постнумерандо является типовой в банковских расчётах.

3.3. Наращенная сумма годовой ренты пренумерандо

Рассмотрим случай потока ежегодных поступлений R с начислением процентов **в начале каждого года (пренумерандо)** по сложной процентной ставке.

Сумма первого платежа S_1 с наращенными на него за весь срок процентами равна

$$S_1 = R \cdot (1 + i)^n,$$

где n – количество платежей величиной R.

Для второго платежа, соответственно получим

$$S_2 = R \cdot (1 + i)^{n-1}.$$

Очевидно, что для последнего платежа проценты не начисляются:

$$S_n = R \cdot (1 + i).$$

Тогда для наращенной суммы ренты получим

$$S^{np} = R(1+i)^n + r(1+i)^{n-1} + \cdots + R(1+i). \qquad (3.3)$$

Отметим, что сумму пренумерандо можно получить из суммы постнумерандо, умножением на $(1 + i)$

$$S^{np} = (1 + i)\, S. \qquad (3.4)$$

Отсюда следует, что сумма пренумерандо больше суммы постнумерандо.

3.4. Наращенная сумма годовой ренты с начальным взносом

Допустим, что в начале срока ренты ее величина равна $\boldsymbol{P_0}$ (первоначальная сумма ренты). В конце срока эта сумма будет равна $P_0\,(1 + i)^n$. Тогда для наращенной суммы ренты получим:

$$S = P_0\,(1 + i)^n + R\,(1 + i)^{n-1} + R\,(1 + i)^{n-2} + \cdots + R$$

$$S = P_0(1+i)^n + R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (3.5)$$

Пример 3.1. Допустим, что проект будет ежегодно в течение 3 лет давать доход по 100 000 руб. Доход помещают на счет под 10 % годовых**.**

1) Найти сумму на счете при начислении сложных процентов постнумерандо и пренумерандо.

2) Найти сумму на счете процентов постнумерандо, если в начале срока ренты на счет единовременно внесена сумма 10 000 руб.

Решение. Наращенная сумма **постнумерандо** в конце срока ренты будет равна:

$S = 100\,000\ (1 + 0.1)^2 + 100\,000\ (1 + 0.1)^1 + 100\,000\ (1 + 0.1)^0 =$ 331 000 руб.

или по (3.1):

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 100000\ \frac{1{,}1^3 - 1}{0{,}1} = 331000 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма **пренумерандо** в конце срока ренты будет равна:

$S^{пр} = 100\ 000(1 + 0.1)^3 + 100\,000\ (1 + 0.1)^2 + 100\ 000(1 + 0.1)^1 =$ 364100.

или

$S^{пр} = (1 + i)\, S = (1 + 0.1)\ 331\,000 = 364\,100$ руб.

Найдем наращение первоначального взноса 10 000 за три года:

$10\,000\ (1 + 0.1)^3 = 13\,310$.

Чтобы получить наращения ренты с первоначальным взносом, нужно к наращенной сумме без первоначального взноса прибавить наращение первоначального взноса (схема постнумерандо).

$S = 13\,310 + 331\,000 = 344\,310$.

В табличном процессоре Excel реализована стандартная функция **БС** {i; n; R; P_0; тип}, где признак «тип» равен нулю или отсутствует, если выплаты идут постнумерандо, и единице – если пренумерандо. Функция БС учитывает знак поступления и платежа; если рентные платежи идут с плюсом, ответ возвращается с минусом, и наоборот.

3.5. Формула наращенной суммы постоянной p-срочной ренты

В начале рассмотрим постоянную ренту, в которой начисление процентов и поступления платежей совпадают по времени $\boldsymbol{m = p}$. Для получения наращенной суммы необходимо заменить номинальную ставку j на процентную ставку за один период $j\ /\ m$ и число периодов n заменить на новое число периодов $n\ m$. Годовой платеж R нужно заменить на платеж за период $R\ /\ m$.Тогда получим формулу для наращенной суммы:

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1 + j/m)^{nm} - 1}{j/m}$$

или

$$S = R\frac{(1 + j/m)^{nm} - 1}{j}. \qquad (3.6)$$

Пример 3.2. Вкладчик в конце каждого месяца помещает в банк 1 000 руб. Проценты начисляются ежемесячно по годовой ставке сложных процентов, равной 12 %. Определить наращенную сумму на счете вкладчика через 2 года.

Решение. Из условий следует, что срок ренты n = 2 года, число начислений процентов равно числу платежей за год $p = m$ = 12 раз, т.е. nm = 12 · 2 = 24, номинальная ставка j = 12 %, период начисления процентов – один месяц.

Процентная ставка и платеж на один период (месяц) будут равны

$$\frac{i}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\% \quad , \qquad \frac{R}{m} = 1000.$$

По первой из формуле (3.6) находим наращенную сумму

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1 + j/m)^{nm} - 1}{j/m} = 1000\frac{(1 + 0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01} = 10^5 \cdot \left[(1{,}01)^{24} - 1\right] =$$

=100 000 (1.2697346 - 1) = 26 973.

3.6. Формула наращения суммы, в которой начисление процентов и поступления платежей не совпадают по времени

Для ***p***-срочной ренты с начислением процентов ***m*** раз в году ***m*** $\neq$ ***p*** можно показать, что наращенная сумма равна

$$S=\frac{R}{p}\frac{(1+j/m)^{nm}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \qquad (3.7)$$

Пример 3.3. В течение трех лет (n = 3) в конце каждого месяца поступают платежи (p = 12) равными долями из расчета 480 000 руб. в год, на которые начисляются ежеквартально (m = 4) сложные проценты 12 % годовых. Найти наращенную сумму ренты.

Решение. Из формулы (3.7) получаем

$$S=\frac{480\,000}{12}*\frac{\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4*3}-1}{\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{\frac{4}{12}}-1}=40\,000\ \frac{1.4258-1}{1.0099-1}=1719962.12$$

3.7. Современная стоимость ренты постнумерандо

При анализе будущих доходов необходимо учитывать их неравноценность во времени.

Пусть

R – размер годового платежа;

i – годовая процентная ставка;

n – срок ренты;

P – современная стоимость ренты.

Сумма приведенных платежей называется **современной стоимостью ренты.**

Приведенная стоимость первого платежа будет равна: $R\frac{1}{1+i}$.

Приведенная стоимость второго платежа будет равна: $R\frac{1}{(1+i)^2}$.

Приведенные платежи образуют геометрическую прогрессию:

$$R\frac{1}{1+i},\ R\frac{1}{(1+i)^2},\ \dots,\ R\frac{1}{(1+i)^n}.$$

Тогда современная стоимость годовой ренты постнумерандо равна:

$$P=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\dots+\frac{R}{(1+i)^n},$$

или, по формуле суммы геометрической прогрессии,

$$P=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.8)$$

Величина $a(i,n)=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ называется **коэффициентом приведения ренты.**

Современную стоимость ***P*** ренты можно найти, дисконтируя будущую стоимость этой ренты ***S***:

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}. \qquad (3.9)$$

3.8. Современная стоимость годовой ренты пренумерандо

Первое поступление ***R*** имеет срок дисконтирования 0 лет**,** второе поступление ***R*** имеет срок дисконтирования 1 год и его приведенная стоимость будет равна $R\dfrac{1}{1+i}$.

Тогда современная стоимость годовой ренты пренумерандо равна:

$$P^{np}=\frac{R}{(1+i)^0}+\frac{R}{(1+i)^1}+\dots\frac{R}{(1+i)^n}. \qquad (3.10)$$

Заметим, что современные стоимости доходов **постнумерандо и пренумерандо** связаны равенством

$$P^{np} = P(1+i). \qquad (3.11)$$

Пример 3.4. Допустим, что проект будет ежегодно в течение 3 лет приносить доход по 100 000 руб. Найти современную стоимость будущих доходов при ставке приведения 10 % .

Решение.

Вариант 1. Предположим, что доходы в 100 000 руб. поступают в конце каждого года (**постнумерандо**).

Вычислим современную стоимость по формуле (3.8):

P=100 000/(1+0.1)+100 000/$(1+0.1)^2$+100 000/$(1+0.1)^3$=248 685.2 руб.

Каждое слагаемое этой суммы означает современную стоимость дохода, поступившего в конце года.

Вариант 2. Предположим, что доходы поступают в начале каждого года (**пренумерандо**). Тогда современная стоимость всех доходов **пренумерандо** будет равна:

P=100 000/$(1+0.1)^0$+100 000/$(1+0.1)^1$+100 000/$(1+0.1)^2$=273 533.7 руб.

Можно убедиться в справедливости формулы (3.11) и наших расчётов, поделив полученные значения P пренумерандо и постнумерандо одно на другое:

273 533 / 248 685 = 1.1 = 1 + 10%.

3.9. Современная стоимость ренты с взносом в конце срока

Допустим, величина ***S*** определяет единовременный взнос в конце срока ренты. Современная стоимость этой величины будет равна:

$$\frac{S}{(1+i)^n}.$$

Тогда формулы

$$P=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{R}{(1+i)^n}+\frac{S}{(1+i)^n},$$

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}+R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (3.12)$$

определяют современную стоимость ренты. Для расчёта приведённой стоимости ренты в этом случае можно использовать стандартную функцию **ПС** {i; n; R; S; тип}, где признак «тип» равен нулю или отсутствует, если выплаты идут постнумерандо, и единице – если пренумерандо. Функция ПС учитывает знак поступления и платежа; если рентные платежи идут с плюсом, ответ возвращается с минусом, и наоборот.

Пример 3.5. Вкладчик намерен положить в банк сумму, чтобы его сын в течение пятилетнего срока обучения мог снимать в конце каждого года по 30 000 руб. и к концу учебы остаток вклада составил 10 000 руб. Определить сумму вклада, если годовая ставка сложных процентов равна 12 %.

Решение. Ежегодные выплаты составляют R = 30 000 руб., срок ренты n = 5, годовая ставка i % = 12 %. Остаток вклада S = 10 000 определяет единовременный взнос в конце срока ренты. По формуле (3.12) находим сумму вклада:

$$P=\frac{10\,000}{(1+0.12)^5}+30\,000\ \frac{1-(1+0.12)^{-5}}{0.12}=113\,817.56$$

Первое слагаемое определяет сумму для остатка вклада, а второе – расходную часть вклада.

3.10. Формула современной стоимости постоянной p - срочной ренты

Рассмотрим постоянную ренту, в которой начисление процентов и поступления платежей совпадают по времени *m* = *p*. Для получения современной стоимости необходимо в формуле:

$$P=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

заменить номинальную ставку *i* на процентную ставку за один период *i / m* и число периодов *n* заменить на новое число периодов *n*m*. Годовой платеж *R* нужно заменить на платеж за соответствующий период *R / m*.

3.11. Определение величины платежа ренты, когда известна будущая стоимость ренты

Рассмотрим обычную годовую ренту сроком *n* лет и годовой процентной ставкой *i*. Требуется определить такую величину ежегодного платежа *R*, чтобы в конце срока получить наращенную сумму *S*. Единовременный взнос в начале срока *P* = 0. Из формулы наращенной суммы найдем величину ежегодного платежа *R*

$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}. \tag{3.13}$$

Соотношение (3.13) реализует стандартная функция **ПЛТ** {i, n; 0; S; тип}, где 0 – размер первоначального взноса, тип – признак постнумерандо (равен 0 или отсутствует) или пренумерандо (равен единице). Функция ПЛТ чувствительна к знаку поступлений/платежей.

Для ***p*** – срочной ренты с номинальной ставкой ***j*** из формулы

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} \tag{3.14}$$

найдем величину платежа ***R / m*** за один период

$$\frac{R}{m} = \frac{S \cdot j/m}{(1 + j/m)^{nm} - 1}. \tag{3.15}$$

Пример 3.6. За 2 года необходимо накопить сумму *S* =300 000 руб. Определить величину ежемесячного платежа *R* при условии, что проценты начисляются в конце каждого месяца по сложной ставке в 12 % годовых.

Решение. Число начислений процентов равно числу платежей за год, т.е. ***p*** = ***m*** = 12, накопленная сумма ***S*** = 300 000, срок ренты ***n*** = 2 года, номинальная процентная ставка ***j*** = 12 %. Тогда

$$R = \frac{300\,000 * 0.1}{(1+0.01)^{24} - 1} = \frac{300\,000}{26.9735} = 111\ 22$$

Таким образом, для накопления 300 000 руб. за 2 года необходимо в конце каждого месяца вносить на счет 11 122 руб.

3.12. Определение величины платежа ренты, когда известна современная стоимость ренты

Рассмотрим обычную годовую ренту сроком *n* лет и годовой процентной ставкой *i*. Требуется определить такую величину ежегодного платежа *R*, чтобы современная стоимость ренты равнялась заданному значению *P*. Единовременная выплата в конце срока *S* = 0. Из формулы современной стоимости ренты

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

найдем величину ежегодного платежа ***R***

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}. \qquad (3.16)$$

Соотношение (3.16) реализует стандартная функция Excel **ПЛТ** {i, n; P; 0; тип}, где 0 – размер финальной выплаты, тип – признак постнумерандо (равен 0 или отсутствует) или пренумерандо (равен единице).

Для *p* – срочной ренты с номинальной ставкой *j* найдем величину платежа *R* / *m* за один период.

Пример 3.7. Определить величину ежемесячного платежа *R* ренты, современная стоимость которой за 2 года составит 300 000 руб. Проценты начисляются в конце каждого месяца по сложной ставке в 12 % годовых.

Решение. Число начислений процентов равно числу платежей за год, т.е. *p* = *m* = 12, накопленная сумма *S* = 300 000 руб., срок ренты *n* = 2 года, номинальная процентная ставка *j* = 12 % . Тогда:

$$\frac{R}{m} = \frac{300\,000 * 0.1}{1(1+0.01)^{-24}} = 14\,122.04 \text{ руб.}$$

Выводы по разделу 3

Рентные механизмы возникают повсеместно, когда речь идёт об обслуживании долга или о создании условий для окупаемости созданных капитальных вложений. В банковской практике и в практике эмиссии и обслуживания долговых ценных бумаг характерны ренты с постоянным размером платежей (аннуитетные ренты). Что касается проектов прямых инвестиций или проектов, основанных на биржевой игре, то там рентные платежи и поступления никогда не являются постоянными. Это связано с существенной неопределённостью в отношении будущих денежных потоков проекта, а также с непрерывным изменением объёмов вложений в ходе фондового инвестирования (например, в связи с периодическим пополнением депозита на брокерском счёте).

Анализ рент поддержан инструментарием стандартных функций Excel (ПС, БС, ПЛТ и др.).

Вопросы для самопроверки

1. Что называется финансовой рентой?
2. Чем различаются ренты постнумерандо и пренумерандо?
3. Чему равна наращенная сумма годовой ренты постнумерандо?
4. Что называется коэффициентом наращения ренты?
5. Чем различаются наращенные суммы рент постнумерандо и пренумерандо?
6. Запишите формулу наращенной суммы годовой ренты с начальным взносом.
7. Запишите формулу современной стоимости годовой ренты постнумерандо.
8. Что называется коэффициентом приведения ренты?
9. Чем различаются современные стоимости рент постнумерандо и пренумерандо?
10. Запишите формулу современной стоимости годовой ренты с конечным взносом.

11. Запишите формулу величины платежа ренты для наращения заданной суммы.
12. Запишите формулу величины платежа ренты для получения заданной современной стоимости.

РАЗДЕЛ 4. НЕКОТОРЫЕ СХЕМЫ ПОГАШЕНИЯ КРЕДИТОВ. ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

4.1. Погашение кредита равными платежами

Кредит означает предоставление денег или товаров в долг при условии возвращения долга и процентов. Сам кредит называют основным долгом, а проценты – процентными деньгами. Проценты начисляются на всю основную сумму долга и присоединяются к ней. Полученная величина составляет размер задолженности по кредиту. Обозначения:

P – основной долг;

I – процентные деньги;

Z – задолженность по кредиту;

i – процентная ставка по кредиту.

Пусть ссуда размера P взята в кредит на n лет под i процентов годовых, причём тело ссуды в течение всего периода займа не погашается. В случае начисления сложных процентов размер задолженности (сумма долга с процентами) будет равен

$$Z = P\,(1+i)^{\,n}. \qquad (4.1)$$

Допустим теперь, что погашение кредита производится в конце каждого периода платежа равными долями, как это и имеет место сейчас в современной практике банковского кредитования. Процесс погашения кредита является регулярной рентой постнумерандо. Для определённости рассмотрим ежегодные платежи.

Предположим, что выплачивая кредитору платеж R в конце года k, заемщик погашает сумму, которая равна этой величине *с начисленными до конца срока кредита процентами*, т.е. погашает задолженность

$$Y_k = P(1+i)^{(n-k)}. \qquad (4.2)$$

Сумма всех задолженностей Y_k должна быть равна общей задолженности Z:

$$P(1+i)^n = R(1+i)^{\,n\text{-}1} + \ldots + R.$$

Отсюда следует равенство:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

и мы вернулись к формуле приведённой стоимости регулярной годовой ренты без финального платежа, формула (3.8).

Таким образом, основной долг P равен сумме современных стоимостей всех погашающих платежей. Ежегодно заемщик выплачивает кредитору сумму

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}},$$

а это уже соотношение (3.16).

Пример 4.1. Банк предоставил клиенту кредит P = 100 000 руб. сроком на n = 5 лет под i = 10 % процентов годовых с погашением в конце каждого года. Определить размер ежегодного платежа.

Решение

Подставим числовые значения задачи в формулу (3.16):

$$R = \frac{P_i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100\ 000}{3.790787} = 26\ 379.75$$

4.2. Разделение платежей на части

Рассмотрим схему погашения долга, в которой погашающий платеж R делится на две части: одна часть погашает основной долг, а вторая – процентные деньги.

Пусть сумма P взята в кредит на n лет под i процентов годовых. Правило разделения погашающего платежа R на части состоит в следующем: часть платежа, погашающего процентные деньги, составляет i % от остатка основного долга в момент платежа.

Введем обозначения:

R – ежегодный платеж,

D_j – платеж по процентам в год j,

B_j – платеж по основному долгу (по телу кредита) в год j,

Z_j – остаток основного долга на конец года j ($Z_0 = P$).

Выплата в конце каждого года j равна сумме платежа по процентам и платежа по основному долгу

$$R = D_j + B_j.$$

Из правила разделения погашающего платежа R на части следуют равенства

$$D_j = i \cdot Z_j\ ;$$

$$B_j = R - D_j\ ;$$

$$Z_j = Z_{(j-1)} - B_j \quad (Z_0 = P). \qquad (4.3)$$

Первое равенство означает, что платеж по процентам равен i % от остатка основного долга, второе – платеж по основному долгу равен разности выплаты в конце каждого года R и платежа по процентам, третье – остаток долга в год j равен разности остатка долга в предыдущий год и платежа по основному долгу в год j.

Пример 4.2. Банк предоставил клиенту кредит P = 100 000 руб. сроком на n = 5 лет под i = 10 % годовых с погашением в конце каждого года. Определить ежегодные выплаты основного долга и по процентам.

Решение. Клиент должен каждый год выплачивать сумму R = 26 379,75 руб. (см. пример 4.1). Выплаты по процентам в конце первого года

$$D_1 = i \cdot P = 0.1 \cdot 100\ 000 = 10\ 000 \text{ руб.},$$

выплаты основного долга

$$B_1 = R - D_1 = 26\ 379 - 10\ 000 = 16\ 379.$$

Тогда остаток основного долга в конце первого года будет равен

$$Z_1 = P - B_1 = 100\ 000 - 16\ 379.75 = 83\ 620.25\ .$$

В конце второго года выплаты по процентам:

$$D_2 = i \cdot Z_1 = 0.1 \cdot 83\ 620.25 \approx 8\ 362;$$

выплаты основного долга:

$$B_2 = R - D_2 = 26\ 379.75 - 8\ 362.03 = 18\ 017.72\ .$$

Тогда остаток основного долга в конце второго года будет равен

$$Z_2 = Z_1 - B_2 = 83\ 620.25 - 18\ 017.72 = 65\ 602.53\ .$$

Расчеты платежей за остальные года проводятся аналогично и сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Расчёт выплат по кредиту из двух частей

Год	Основные платежи B_i	Проценты по платежам D_i	Остаток долга Z_i
0			100 000.00
1	16 379.75	10 000.00	83 620.25
2	18 017.72	8 362.03	65 602.53
3	19 819.50	6 560.25	45 783.03
4	21 801.44	4 578.30	23 981.59
5	23 981.59	2 398.16	0.00
Сумма	100 000.00	31 898.74	

Расходы по займу за 5 лет составят 26 379.7 * 5 = 131 898 руб. Из них 100 000 составляют основной долг и 31 898 – проценты.

Расчёт вида табл. 4.1 по формулам (4.3) производится с помощью стандартных функций Excel **ОСПЛТ** и **ПРПЛТ**. Функция ОСПЛТ{i; j; n; Z_0; тип} определяет размер текущего списания по телу кредита. Функция ПРПЛТ{i; j; n; Z_0; тип} определяет начисление процентов по кредиту. Если тип=0 или отсутствует, то выплаты идут постнумерандо; в противном случае – пренумерандо.

4.3. Чистая современная ценность ренты

Чистая приведённая стоимость или чистая современная ценность рентных поступлений платежей (NPV) – это наиболее распространённое понятие в теории инвестиционного анализа, свидетельствующее об эффективности протекания экономического проекта.

Пусть капиталовложения и доходы представлены в виде потока платежей, составляя единую рентную программу. На оси выплат, принадлежащей инвестору проекта, капиталовложения представлены как платежи (идут со знаком минус), а доходы в форме сальдо потоков операционной и инвестиционной деятельности проекта – как поступления (идут с плюсом).

Обозначения:

R_j – величина дохода в году ***j***,

n – срок проекта, т.е. количество лет, в течение которых будут поступать доходы,

i – ставка приведения (ставка сравнения, ставка дисконтирования денежных потоков),

I_0 –- величина первоначальных капиталовложений.

Предполагается, что доходы поступают в конце каждого года.

Чистой современной ценностью (Net Present Value – *NPV*) называется разность дисконтированных показателей поступлений и платежей:

$$NPV = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n} - I_0,$$

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} - I_0. \qquad (4.4)$$

Если $NPV > 0$, то проект прибыльный и окупается на установленном горизонте инвестирования, если $NPV < 0$, то проект не окупается (экономически неэффективен).

Пример 4.3. Допустим, что проект рассчитан на два года и требует инвестиции в $I_0 = 10$ млн. руб. В конце первого года доход составит $R_1 = 5$ млн. руб., а в конце второго года – $R_2 = 12$ млн. руб. Найти чистый приведенный доход при ставке дисконтирования в $i = 10$ % годовых.

Решение. Найдем чистый приведенный доход по (4.4), в тыс. руб.:

NPV = 5000 / 1.1 + 12 000 / 1.21 – 10 000 = 4 546 + 9 917 – 10 000 = 4 463 тыс. руб.

Величина 4 546 равна современной стоимости 5 000, а величина 9 917 равна современной стоимости 12 000.

Оценка NPV может проводиться с применением стандартной функции **ЧПС** {i; массив}, где «массив» - набор значений поступлений и платежей в рамках рентной программы со своими знаками. При использовании функции ЧПС предполагается, что первый рентный платёж (капиталовложение) осуществляется в самом начале программы (пренумерандо).

4.4. Внутренняя ставка дохода. Срок окупаемости

Внутренняя ставка дохода *IRR* (Internal Rate of Return) представляет собой процентную ставку, при которой чистый приведенный доход $NPV = 0$. Таким образом, *IRR* является корнем нелинейного алгебраического уравнения относительно $\boldsymbol{i}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} = I_0 . \qquad (4.5)$$

Если ставка дисконтирования $\boldsymbol{i} < \boldsymbol{IRR}$, то проект – прибыльный (окупается). Если ставка дисконтирования $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{IRR}$, то проект – убыточный (не окупается).

Если обозначить в (4.5) фактор дисконтирования x = 1 / (1 + i), то (4.5) представляет собой алгебраическое полиномиальное уравнение относительно x, и, в соответствии с так называемой «основной теоремой алгебры», имеет n корней. Если порядок уравнения n=2 или n=3, оно может быть решено аналитическими методами. В противном случае, уравнение придётся решать численными методами, используя итерационные алгоритмы нахождения корней алгебраического полинома. По экономическому смыслу задачи, уравнение (4.5) имеет хотя бы один вещественный корень (собственно IRR).

В том случае, если при расчётах оказывается, что IRR<0, это говорит о существенной недостаточности денежных потоков проекта для признания его экономически состоятельным. Исходные капиталовложения никогда не вернутся к инвестору даже без учёта дисконтирования.

В Excel процедуру определения IRR реализует стандартная функция **ВСД** {массив}, в которую на вход подаётся массив рентных поступлений и платежей. Предполагается, что первый элемент массива – стартовое капиталовложение (идёт со знаком минус).

Пример 4.4. Рассчитаем для данных из примера 4.3 внутреннюю ставку дохода.

Решение.

Внутреннюю ставку дохода находим из решения уравнения (4.5) относительно ***i***

$$\frac{5000}{1+i}+\frac{12000}{(1+i)^2}=10000\,.$$

Обозначая $\boldsymbol{x} = 1 + \boldsymbol{i}$ и произведя преобразования, получим квадратное уравнение

$$10\,x^2 - 5\,x - 12 = 0\,.$$

Положительный корень этого уравнения $\boldsymbol{x_1}$ = 1.3736 . Отсюда находим внутреннюю ставку дохода

$IRR = x_1$-1 = 1.3736 - 1 = 0.3736 = 37.36 % годовых.

Сроком окупаемости называется число лет, за которое сумма доходов становится равной размеру исходных капиталовложений. Различают простой (PBP) и дисконтированный (DPBP) сроки окупаемости.

Пример 4.5. Рассчитаем для данных из примера 4.3 простой (PBP) дисконтированный срок окупаемости (DPBP).

Решение. Простой срок окупаемости PBP составляет 1 + x, где $\boldsymbol{x}$ обозначает дробную часть года. Если не учитывать стоимость денежных потоков во времени, приходим к уравнению

$$5000 + 12\,000\,x = 10\,000\ .$$

Отсюда дробная часть срока окупаемости

$$x = \frac{5000}{12000} = 0.41$$

Итого PBP = 1.41 лет.

Срок окупаемости с учётом времени поступления доходов (DPBP) приводит к уравнению:

$$5000/1.1 + 12000/1.1^2\,\mathrm{x} = 10\,000.$$

$$4\,545.45 + 9\,917.36\,x = 10\,000$$

$$\mathrm{x} = (10\,000 - 4545.5) / 9\,917.36 = 0.55$$

Тогда DPBP = 1 + x = 1.55 лет. Дисконтированный срок окупаемости длиннее простого, это понятно как из формул, так и из здравого смысла.

Парадоксально, но стандартных функций Excel для определения PBP и DPBP не существует. Поэтому определение сроков окупаемости в ходе инвестиционного планирования обычно производится вручную, с максимальной разбивкой горизонта планирования на периоды, с фиксацией первого такого периода, где NPV>0, а для предыдущего периода выполняется NPV < 0.

Выводы по разделу 4

Практическое применение рент в финансовой или в инвестиционной деятельности связано с калькулированием банковских кредитных продуктов, а также с бюджетированием инвестиционных проектов. В первом случае, оценке подлежат размеры процентных платежей и платежей по основному долгу (для этого Excel предлагает стандартные функции ОСПЛТ и ПРПЛТ), во втором случае следует оценивать чистую современную ценность денежных потоков проекта и внутреннюю ставку доходности проекта (стандартные функции ЧПС и ВСД).

Вопросы для самопроверки

1. Что называется основным долгом и процентными деньгами при погашении кредита?
2. Запишите формулу размера ежегодного платежа при погашении кредита равными долями.
3. В чем состоит правило разделения погашающего платежа R на части?
4. Что называется чистым приведенным доходом?
5. Что называется внутренней ставкой дохода?
6. Запишите формулу срока окупаемости с учетом времени поступления доходов.

РАЗДЕЛ 5. ОБЛИГАЦИЯ КАК РЕНТНЫЙ ПРОЕКТ

5.1. Цена облигации с выкупом в конце срока. Цена бескупонной облигации

Подробно исследование доходности инструментов с фиксированным денежным доходом (к числу которых относятся и облигации), производится в рамках курса «Анализ и моделирование финансовых рынков». В настоящем разделе облигация рассматривается не как финансовый инструмент, со своими специфическими особенностями, а как рентный проект, со своим набором предустановленных поступлений и платежей. Если для эмитента облигаций стоимость этого инструмента известна заранее (фиксируется процентной ставкой), то для владельцев облигации на вторичном рынке доходность колеблется в широких пределах, в связи с колебаниями курсовых рыночных цен на этот инструмент. Косвенно влияние рынка на цену облигации можно оценить, применяя фактор дисконтирования рентных облигационных потоков – как инструмент сопоставления доходности по облигации и среднерыночной доходности по долговым обязательствам. Чем выше по доходности облигация от рынка, тем выше её курсовая цена, и наоборот.

Итак, облигации, как долговой инструмент, имеют номинальную стоимость и обеспечивают ее держателю некоторый регулярный доход в виде процентов по купонам и выкупную цену в конце срока действия облигации. Основные параметры облигации:

1) Номинальная цена или номинал ***N*** – это стоимость облигации, объявленная в момент выпуска.

2) Дата погашения облигации – это момент возращения ссуды (номинальной цены), от эмитента к последнему владельцу.

3) Выкупная цена **Q** – эта сумма, которую выплачивают при погашении облигации. Она может отличаться от номинала (хотя на практике такое происходит крайне редко, только в связи с существенными колебаниями рыночных условий).

4) Даты выплаты процентов по облигации.

5) Купонная процентная ставка ***q*** дает владельцу облигации разовый купонный доход, равный доле q от номинала N, т.е. $q*N$. Например, если

купон составляет q = 10 % в год, номинал равен N =1 000, то разовый купон равен 100 за год, а за полгода – 50.

Облигации с момента их эмиссии и до погашения продаются и покупаются по рыночным ценам. Цену одной облигации будем обозначать ***P***.

Предположим, что облигация номинала N приобретена за ***n*** лет до погашения. Проценты по облигации выплачиваются в конце каждого года по купонной ставке ***q***. На фондовом рынке доходность на инвестиции с уровнем риска, соответствующим данной облигации, будем называть доходностью до погашения. Найдем цену облигации, если рыночная доходность до погашения равна ***i*** *%* годовых.

Пример 5.1. Номинал облигации равен 1 000 руб., купон – 20 % годовых выплачивается один раз в году, до погашения остается 2 года. На рынке доходность на инвестиции с уровнем риска, соответствующим данной облигации, оценивается в 15 % годовых. Определить цену облигации Р.

Решение. В конце каждого года инвестор получает купонный доход в сумме ***N*q*** = 1000 · 20 % = 200 руб. В конце второго года, кроме купона, инвестор получает сумму номинала 1 000 руб.

Таким образом, облигация – это рентный проект с потоками, соответствующими табл. 5.1.

Табл. 5.1. Потоки платежей по облигации

Год	1	2
Сумма платежа	200	1200

Доход 200 в конце первого года имеет современную стоимость

$200/(1+0.15)^1=173.91$.

Доход 1200 в конце второго года имеет современную стоимость

$1200/(1+0.15)^2=907.37$.

Таким образом, цена облигации равна

Р = 173.91 + 907.37 = 1081.28 руб.

За счёт того, что q > i, цена облигации идёт выше её номинала.

Теперь предположим, что облигация номинала N приобретена за n лет до погашения. Проценты по облигации выплачиваются в конце каждого года по купонной ставке q. Рыночная доходность равна i % годовых. А выкупная цена равна Q, причём Q $\neq N$. В этом – главное отличие от условий предыдущего примера.

Доходы от облигации образуют постоянную ренту постнумерандо с периодическими платежами $C = q*N$ и единовременным платежом Q в конце срока:

qN, qN, …, qN + Q.

Цена облигации ***P*** равна современной стоимости ренты

$$P=\frac{Q}{(1+i)^n}+\frac{qN}{(1+i)}+\frac{qN}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{qN}{(1+i)^n}$$

$$P=\frac{qN}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]+\frac{Q}{(1+i)^n}\,. \qquad (5.1)$$

Из формулы для цены облигации следует, что **цена облигации *P* равна номиналу** ***N***, если выкупная цена равна номиналу **Q** = ***N*,** а купонная ставка и рыночная доходность ***q*** = ***i***.

Пример 5.2. Номинал облигации равен 1000, купон – 20 % годовых, выплачивается один раз в году, до погашения остается 2 года. На рынке доходность на инвестиции с уровнем риска, соответствующим данной облигации, оценивается в 15 % годовых. Определить цену облигации, если выкупная цена облигации равна 1100.

Решение. Подставляя в формулу (5.1) N = 1000, q = 20 %, n = 2, i = 15 %, Q = 1 100, получим:

$$P=\frac{0.2*1000}{0.15}\left[1-\frac{1}{(1+0.15)^2}\right]+\frac{1100}{(1+0.15)^2}. = 1179.91429$$

Иногда облигации выпускаются без купонов и реализуются при первичном размещении с существенным дисконтом к номиналу. Формулу для цены бескупонной облигации можно получить, полагая в (5.1) купон ***q*** = 0% годовых:

$$P = \frac{Q}{(1+i)^n}. \qquad (5.2)$$

Пример 5.3. Определить цену бескупонной облигации, которая приобретена за 3 года до погашения по номинальной стоимости 1 000. Рыночная процентная ставка равна 15 % годовых.

Решение.

$$P = \frac{N}{(1+i)^n} = \frac{1000}{(1+0.15)^3} = 675.57$$

5.2. Курс облигации. Доходность облигации с выкупом в конце срока. Доходность облигации с нулевым купоном

Так как у разных облигаций номиналы и цены существенно различаются, то для их сравнения определяют курс облигации.

Под **курсом** облигации ***K*** понимают цену одной облигации ***P*** в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$K = \frac{P}{\frac{N}{100}} = \frac{P}{N}100. \qquad (5.3)$$

Если облигация номинала ***N*** = 1000 приобретена по цене ***P***=1 114.16, то ее курсовая стоимость равна:

$$K = \frac{P}{N}100 = \frac{1114.16}{1000}100 = 111.416,$$

т.е. курс облигации составляет 111.416 % от номинала.

Заметим, что $\frac{P}{N} = \frac{K}{100}$.

Разделив обе части формулы (5.1) на стоимость номинала ***N***, получим *формулу для определения* курса облигации:

$$K = \frac{L}{(1+i)^n} + \frac{q \cdot 100}{(1+i)} + \frac{q \cdot 100}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{q \cdot 100}{(1+i)^n}. \qquad (5.4)$$

Здесь L обозначает курсовую стоимость выкупной цены облигации Q

$$L = \frac{Q}{N} 100. \tag{5.5}$$

Пример 5.4. Облигация приобретена за 2 года до погашения по номинальной стоимости 1 000 и купонной ставке 20 % годовых. Рыночная доходность равна 15 % годовых. Выкупная цена облигации равна ее номинальной стоимости. Определить курс облигации, если купоны выплачиваются в конце каждого года.

Решение.

Найдем курсовую стоимость выкупной цены облигации $Q = N = 1\ 000$.

$$L = \frac{Q}{N} 100 = \frac{1000}{1000} 100,$$

т.е. курсовая стоимость составляет 100 % от номинала. Тогда курс облигации равен:

$$K = \frac{100}{(1+0.5)^2} + \frac{0.2 * 100}{(1+0.15)} + \frac{0.2 * 100}{(1+0.15)^2} + \cdots + \frac{0.2 * 100}{(1+0.15)^2} = 108.128$$

т.е. курс облигации составляет 108,13 % от номинала.

Допустим, что облигация выкупается по цене **Q** $\neq$ ***P***. *К*упон выплачиваются в конце каждого года по ставке ***q***. Доходы от облигации образуют ренту и состоят из выкупной цены при погашении облигации и периодических поступлений по купонам.

Если облигация приобретена по цене ***P***, то рента и цена образуют инвестиционный проект, в котором цена ***P*** играет роль инвестиций.

Полная внутренняя доходность облигации равна внутренней ставке дохода определяемого ею инвестиционного проекта, т.е. полная доходность ***i*** является решением уравнения:

$$\frac{Q}{(1+i)^n} + \frac{qN}{(1+i)} + \frac{qN}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{qN}{(1+i)^n} - P = 0.$$

Отсюда следует, что полная доходность облигации – рыночная ставка, при которой цена облигации равна современной стоимости всех доходов.

Если рыночная ставка меньше полной доходности облигации, то цена облигации не окупится будущими доходами.

Пусть известна курсовая стоимость облигации *K*. Тогда полная доходность ***i*** облигации является решением уравнения

$$K=\frac{L}{(1+i)^n}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^n},$$

$$K=\frac{q\cdot 100}{(1+i)}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{q\cdot 100+L}{(1+i)^n},$$

где L определяется по (5.5).

Пример 5.5. Номинал облигации равен 1 000, купон 20 % годовых выплачивается один раз в году. Определить полную доходность облигации i, если она приобретена по цене 1 100 за 2 года до погашения и выкупается по 1 200.

Решение. Уравнение полной доходности

$$\frac{200}{(1+i)}+\frac{1400}{(1+i)^2}-1100=0.$$

Отсюда следует, что полная доходность облигации равна 22.27 % годовых. Превышение доходности i над купонной ставкой q обусловлено тем, что выкупная цена облигации на 20% больше её номинала.

Доходность облигации с нулевым купоном. Цена такой облигации равна современной стоимости номинала *N:*

$$P=\frac{N}{(1+i)^n}. \tag{5.6}$$

Если известна цена *P* облигации или ее курс *K*, то полная доходность i будет равна:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{N}{P}}} - 1, \quad i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1. \qquad (5.7)$$

Пример 5.6. Облигации с нулевым купоном погашаются через 5 лет. Курс реализации на момент погашения равен 45. Найти полную доходность облигации.

Решение. В соответствии с (5.7), она равна:

$$i = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{45}{100}}} - 1 = 0{,}17346,$$

т.е. 17.3 % годовых.

5.3. Поведение цены облигаций. Дюрация по Маколею. Волатильность цены. Модифицированная дюрация

Для сравнения облигаций с одинаковым сроком погашения, но с различной структурой купонных платежей, необходимо учитывать особенности распределения доходов во времени («профиль» поступления доходов).

Таким показателем является **дюрация – взвешенное среднее моментов поступления платежей**.

Дюрация по Маколею. Для выбора облигации необходимо как-то оценивать ее риск. Он связан со сроком облигации: чем больше срок, тем выше риск.

$$D = 1\frac{C}{(1+i)P} + 2\frac{C}{(1+i)^2 P} + \cdots + j\frac{C}{(1+i)^j P} + \cdots + n\frac{C}{(1+i)^n P} + \frac{nN}{(1+i)^n P}, \quad (5.8)$$

где $C = q\,N$ – размер купона.

Каждое слагаемое равно произведению времени $\boldsymbol{j}$ выплаты купона на величину:

$$\frac{C}{(1+i)^j P},$$

т.е., на отношение приведенной стоимости ***j***-го купона к цене облигации. Дюрация измеряется в годах и показывает среднее время всех выплат. Этот показатель учитывает особенности потока купонов – отдаленные купоны имеют меньший вес, чем более близкие к моменту оценки.

Дюрация бескупонной облигации равна сроку ***n*** до ее погашения. В остальных случаях дюрация меньше ***n***. Чем выше дюрация, тем полезнее этот финансовый инструмент для своего конечного владельца, тем ниже срок окупаемости соответствующего рентного инвестиционного проекта.

Пример 5.7. Две облигации номинала ***N*** = 1 000 приобретены за 3 года до погашения. Купоны выплачиваются один раз в году и равны 10 % и 20 % годовых от номинала соответственно. Определить их дюрации при рыночной доходности ***i*** = 20 % годовых.

Решение. Купонные доходы облигации равны соответственно

$C_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100$, $C_2 = 0.2 \cdot 1000 = 200$.

Вычислим цену первой облигации:

$$P_1 = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_1}{(1+i)^2} + \frac{C_1+N}{(1+i)^3} = \frac{100}{(1+0.2)} + \frac{100}{(1+0.2)^2} + \frac{1100}{(1+0.2)^3} = \\ = 789.352$$

Дюрация первой облигации равна:

$$D_1 = 1\frac{C_1}{(1+i)P_1} + 2\frac{C_1}{(1+i)^2 P_1} + 3\frac{C_1+N}{(1+i)^3 P_1} =$$

$= 1 \cdot 0.106 + 2 \cdot 0.088 + 3 \cdot 0.805 = 2.701$ лет.

Цена второй облигации равна номиналу 1000, как это следует из (5.1). Дюрация второй облигации равна:

$$D_2 = 1\frac{C_2}{(1+i)P_2} + 2\frac{C_2}{(1+i)^2 P_2} + 3\frac{C_2+N}{(1+i)^3 P_2}$$

$= 1 \cdot 0.167 + 2 \cdot 0.1389 + 3 \cdot 0.694 = 2.528$ лет.

Вывод: вторая облигация имеет меньший риск, поскольку ее купон 200 больше купона первой облигации, и потому рентный проект второй облигации окупается быстрее.

Дюрация по Маколею может быть определена с использованием стандартной функции:

ДЛИТ {дата_согл; дата_вступл_в_силу; купон; доход; частота ;базис},

где:

- дата_согл – дата продажи облигации первому инвестору. Все даты в функцию надо заводить в формате даты, используя стандартную функцию **ДАТА**{};
- дата_вступл_в_силу – дата погашения облигации;
- купон – годовая купонная ставка q;
- доход – размер регулярного купонного дохода C;
- частота – частота купонных выплат, раз в год;
- базис – используемый способ вычисления длительности интервалов в днях. Если базис – 0 или опущен, это предполагает использования американской системы датировок, применяемой на бирже NASDAQ (30 дней в месяце, 360 дней в году).

Волатильность цены. Модифицированная дюрация. В 1939 г. Хиксом было установлено соотношение

$$D = - (1+i)\ \partial \ln P / \partial i. \tag{5.9}$$

Модифицированная дюрация или волатильность цены определяется равенством

$$MD = -\frac{\partial \ln P}{\partial i} = \frac{D}{1+i}. \tag{5.10}$$

Пусть $P\ (i)$ – цена облигации при исходной рыночной доходности i, $P\ (i + \Delta\ i)$ – цена облигации при изменении доходности на величину Δi .

Тогда изменение цены $\Delta P = P\ (i + \Delta i) - P(i)$ можно приблизительно определить как

$$\Delta P \approx -MD \cdot P \cdot \Delta i\,. \tag{5.11}$$

Следует обратить внимание, что движение рыночной доходности и движение цены на облигацию противоположны по знаку. Рост доходности по рынку требует от облигации такой же дополнительной доходности, которая может быть извлечена только через дисконт, т.е. через дополнительное снижение цены.

Из (5.11) следует, что процентное изменение цены приблизительно составляет

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -MD \cdot \Delta i\,.$$

В частности, при увеличении доходности на 1 % годовых, т.е. при $\Delta\, i =$ 1 % годовых, получаем

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -MD\,,$$

т. е. модифицированная дюрация показывает, на сколько процентов приблизительно уменьшится цена облигации, при увеличении средней доходности по рынку на 1 % годовых.

Пример 5.8. Облигация номинала N = 1 000 руб. приобретена за 3 года до погашения. Купоны выплачиваются один раз в году и равны 20 % годовых от номинала. При рыночной доходности i = 20 % определить

1) модифицированную дюрацию

2) процентное изменение цены при рыночной доходности i = 21 % годовых.

Решение. Модифицированная дюрация облигации равна

$$MD \;= \frac{D}{1+i} = \frac{2.528}{1.2} = 2.107\,.$$

Отсюда следует, что при увеличении рыночной доходности на 1% годовых, изменение цены облигации составит 2.107 % от её первоначальной цены 1 000 руб.,

$\Delta P_2 \approx MD_2$*P_2*1% = -2.107*1000*0.1 = -21.07 , т.е. цена будет приблизительно равна

$$P = 1000 – 21.1 = 978.9 .$$

Найдем точное процентное изменение цены. Новая цена облигации при доходности 21 % годовых будет равна, в соответствии с (5.1)

$$\frac{200}{(1+0.21)} + \frac{200}{(1+0.21)^2} + \frac{200}{(1+0.21)^3} + \frac{1000}{(1+0.21)^3} = 929.26 .$$

Процентное изменение цены составляет

$$\frac{929.26-1000}{1000} . *100\% = -2.074\% .$$

Модифицированная дюрация облигации может быть определена с использованием стандартной функции:

МДЛИТ {дата_согл; дата_вступл_в_силу; купон; доход; частота ;базис},

где все параметры функции определяются точно так же, как это происходит для случая функции **ДЛИТ**{}.

Выводы по разделу 5

Облигация является специфическим рентным проектом, оценка потоков в рамках которого осуществляется по правилам, изложенным в разделах 2 и 3 настоящего учебного пособия. Специфика этого проекта в том, что, применительно к задачам фондового менеджмента, возникает потребность в ежедневной оценке справедливой (паритетной) цены облигаций. Для этой цели анализируются факторы дюрации (стандартная функция ДЛИТ) и модифицированной дюрации по Маколею-Хиксу (стандартная функция МДЛИТ Excel). Чем больше дюрация, тем длиннее срок окупаемости инвестиций в рентный облигационный проект, и тем выше уровень риска инвестиций, связанных со снижением доходности вложений.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные параметры облигации.

2. Что называется доходностью до погашения?
3. Чему равна цена облигации с выкупом в конце срока?
4. Чему равен курс облигации?
5. Напишите уравнение для определения доходности облигации с выкупом в конце срока.
6. Что показывает дюрация по Маколею?
7. Что показывает модифицированная дюрация?

РАЗДЕЛ 6. ФИНАНСОВЫЕ ОПЕРАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

6.1. Финансовые операции в условиях полной неопределенности

В том случае, если финансовые операции совершаются в условиях информационной неопределённости, возникает рыночный риск (см. параграф 1.3). Первичные способы идентификации и анализа риска базируются на игровых моделях, с составлением матриц дохода игрока, где по строкам – варианты решений, а по столбцам – состояния внешней по отношению к проекту рыночной среды.

Пример 6.1. Предположим, что инвестор намерен приобрести сроком на 1 год один из 4 видов ценных бумаг F_i:

ГО – государственные облигации с купонной ставкой 8 % годовых;

КО – корпоративные облигации с купонной ставкой 9 % годовых;

инвестиционные проекты 1 и 2, все доходы которых поступят в конце года.

Ситуация **полной неопределенности** характеризуется полным отсутствием информации о будущем состоянии экономики, когда у нас нет абсолютно никаких представлений о том, какие сценарии экономического развития будут наиболее или наименее предпочтительными (все сценарии равноожидаемы или равновероятны). Доходность инвестора зависит от состояния экономики в конце года. Рассмотрим пять состояний экономики A_j: спад (глубокий и незначительный), стагнация и подъем (незначительный и сильный).

Сведем все данные в табл. 6.1. Предположим, что инвестор рассматривает несколько возможных финансовых операций F_i, $i = 1, ..., m$. Их доходность зависит от состояния экономики $A_1 \ldots A_n$. Если на рынке сложилась ситуация A_j, а инвестор выбрал финансовую операцию F_i, то он получит доход q_{ij}.

Таблица 6.1. Игровая матрица доходов инвестора

	Спад			Подъем	
	глубокий	незнач.	стагнация	незнач.	сильный
ГО	8	8	8	8	8
КО	12	10	9	8,5	8
Проект 1	-3	6	11	14	19
Проект 2	-2	9	12	15	26

Матрицу **Q** = (***q***$_{ij}$) назовем матрицей доходов

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} \; q_{12} \; \cdots \; q_{1n} \\ q_{21} \; q_{22} \; \cdots \; q_{2n} \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ q_{m1} \; q_{m2} \; \cdots \; q_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Рассмотрим несколько критериев для выбора решения об инвестировании в условиях полной неопределенности.

6.2. Критерий Вальда (крайнего пессимизма)

Если руководствоваться этим критерием, то при выборе финансовой операции инвестору надо рассчитывать на самый “худший“ ее исход. Такой “перестраховочный” критерий подходит для того, кто очень боится проиграть (минимальная терпимость к риску).

Рассматривая финансовую операцию $\boldsymbol{F_i}$, инвестор считает, что на самом деле ситуация для него складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход. Поэтому выбирает минимальное значение в строке ***i***

$$a_i = \min_j q_{ij}. \tag{6.2}$$

Затем он выбирает финансовую операцию F_k с наибольшим a_i

$$a_k = \max_i a_i = \max_i \min_j q_{ij}. \tag{6.3}$$

Пример 6.2. Рассмотрим пример 6.1, используя критерий Вальда.

Решение. Добавим к табл. 6.1 столбец, который состоит из минимальных значений ее строк, и получим табл. 6.2.

Таблица 6.2. Скорректированная табл. 6.1 под использование критерия Вальда

	Спад			**Подъем**		**мин в строке**
	Глубокий	**Незнач.**	**Стагнация**	**Незнач.**	**Сильный**	
ГО	8	8	8	8	8	8
КО	12	10	9	8,5	8	8
проект 1	-3	6	11	14	19	-3
проект 2	-2	9	12	15	26	-2
					max min	**8**

Максиминное значение дохода 8, полученное с применением формул (6.2) и (6.3), достигается для двух бумаг: ГО или КО. Таким образом, если у инвестора терпимость к риску минимальна, ему необходимо исключить из состава инвестиций проекты, в которых может быть получен отрицательных доход (убыток). Таких инвесторов называют **консервативными.** Для них самым подходящим советом является цитата из Екклесиаста: «Лучше горсть с покоем, чем пригоршни с томлением духа».

6.3. Критерий Сэвиджа (минимального риска)

Рассмотрим следующее определение риска финансовой операции. Для каждого столбца ***j*** матрицы доходов найдем наибольший элемент:

$$b_j = \max_i q_{ij}. \tag{6.4}$$

Риск финансовой операции $\boldsymbol{F_i}$ определим равенством

$$r_{ij} = b_j - q_{ij}. \tag{6.5}$$

Матрица $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r_{ij}})$ называется матрицей рисков

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Фактически, в матрицу (6.6) включены элементы недополученной прибыли, в сравнении с наилучшем вариантом осуществления финансовой операции.

Пример 6.3. Найдем матрицу риска для примера 6.1.

Решение. Найдем максимальный элемент в каждом столбце табл. 6.1 (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Оценка максимума дохода по столбцу

	Спад			Подъем	
	глубокий	**незнач**	**стагнация**	**незнач**	**сильный**
ГКО	8	8	8	8	8
КО	12	10	9	8,5	8
Проект 1	-3	6	11	14	19
Проект 2	-2	9	12	15	26
максимум в столбце	**12**	**10**	**12**	**15**	**26**

Составим матрицу риска, которая состоит из элементов полученных вычитанием из максимума столбца значений элементов того же столбца. Например:

$r_{11} = 12 – 8 = 4;$

$r_{21} = 12 – 12 = 0;$

$r_{31} = 12 – (-3) = 15;$

$r_{41} = 12 – (-2) = 14.$

В результате вычислений получим матрицу табл. 6.4.

Таблица 6.4. Матрица рисков

Матрица рисков для перспективных состояний экономики:					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
ГКО	4	2	4	7	18
КО	0	0	3	6.5	18
Проект 1	15	4	1	1	7
Проект 2	14	1	0	0	0

Критерий Сэвиджа строится на следующем базовом предположении. Рассматривая решение о выборе финансовой операции $\boldsymbol{F_i}$, инвестор предполагает, что на рынке существуют инвестиции, отличающиеся максимумом дохода. На этом фоне можно получить максимальные убытки (впасть в максимальный риск).

$$q_i = \max_j r_{ij}\,. \qquad (6.7)$$

Соответственно, необходимо подобрать такую финансовую операцию, которая даст минимальный риск относительно этого пикового уровня дохода:

$$\min_i q_i = \min_i \max_j r_{ij} . \tag{6.8}$$

Пример 6.4. Решим пример 6.1. методом Сэвиджа.

Решение. Найдем в матрице риска табл. 6.4 максимальный элемент в каждой строке (табл. 6.5).

Таблица 6.5. Определение максимума в строках матрицы рисков

Матрица рисков						Макс в строке
ГКО	4	2	4	7	18	18
КО	0	0	3	6,5	18	18
Проект 1	15	4	1	1	7	15
Проект 2	14	1	0	0	0	14
					min max	**14**

По критерию Сэвиджа видно, что инвестору выгодно принять Проект 2, отвечающий условию **минимакса** риска. Это обусловлено тем, что делается расчёт на инвестора **промежуточного** типа. С одной стороны, такой инвестор согласен принять на себя определённые риски потенциальных убытков (в отличие от консервативного инвестора). С другой стороны, он не готов принимать решения, которые могут нести серьёзное недополучение прибыли на фоне более рискованных вариантов инвестирования (браковка консервативных сценариев инвестиций). И в то же время, инвестор этого типа не хочет совсем заигрываться, бракуя такие сценарии, где развивается максимальный убыток. Это – средняя линия, средний путь.

6.4. Финансовые операции в условиях частичной неопределенности

Принятие решений по правилам Вальда и Сэвиджа дают **гарантированные** оценки доходности финансовых операций. Эти оценки можно улучшить, если использовать информацию о состоянии экономики; в первую очередь - об экспертно оцениваемой вероятности того или иного состояния экономики. Финансовая операция называется вероятностной, если можно оценить субъективную (экспертную) вероятность каждого ее исхода.

Пусть финансовая операция допускает n различных исходов. Обозначим $\boldsymbol{d_j}$ случайную доходность операции (в процентах годовых), а $\boldsymbol{p_j}$ – вероятность.

Финансовая операция характеризуется дискретной случайной величиной доходности ξ с рядом распределения (см. параграф 1.1):

ξ	d_1	...	d_n
p	p_1	...	p_n

Ожидаемой доходностью или **эффективностью** финансовой операции называется математическое ожидание ее случайной доходности ξ

$$m = d_1\, p_1 + d_2 p_2 + \ldots + d_n\, p_n. \qquad (6.9)$$

Дисперсией финансовой операции называется дисперсия ее случайной доходности ξ.

$$D = M\,(\xi^2) - m^2. \qquad (6.10)$$

Волатильностью финансовой операции ***r*** называется среднеквадратичное отклонение ее случайной доходности ξ

$$\sigma = \sqrt{D}\ . \qquad (6.11)$$

Также целесообразно соотносить ожидаемую эффективность и волатильность инвестиций, вводя коэффициент интегрального инвестиционного эффекта (КИИЭ):

$$\text{КИИЭ} = \mathrm{m} / \sigma \qquad (6.12)$$

Пример 6.5. Найдем эффективности и волатильности для примера 6.1. Допустим, что каждое состояние на рынке имеет субъективную вероятность, записанную в табл. 6.6, и соответствующие исходы образуют полную группу.

Таблица 6.6. Субъективные вероятности экономических сценариев

	Спад			**Подъем**	
	глубокий	**незнач**	**стагнация**	**незнач**	**сильный**
ГКО	8	8	8	8	8
КО	12	10	9	8,5	8
Проект 1	-3	6	11	14	19
Проект 2	-2	9	12	15	26
Вероятность	**0.05**	**0.20**	**0.50**	**0.20**	**0.05**

Замечание. Встаёт закономерный вопрос о способе получения субъективных вероятностей для экономических сценариев. Частотным способом такие вероятности не получить (отсутствует статистическая однородность). В этом случае, необходимо прибегать к анализу не самих вероятностей, а рядов предпочтения одних сценариев развития другим. В этом случае, можно получать наиболее достоверные оценки вероятностных рядов, исходя из результатов теории максимума информационной энтропии [18].

Решение. Найдем эффективность и волатильность КО:

$m = 12 \cdot 0.05 + 10 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0,5 + 8.5 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0,.5 = 9.2,$

$D = 12^2 \cdot 0.2 + 10^2 \cdot 0.2 + 9^2 \cdot 0.5 + 8.5^2 \cdot 0.2 + 8^2 \cdot 0.05 - 9.2^2 = 0.71,$

$\sigma = \sqrt{0,71} = 0.84$.

Аналогичным образом вычисляются эффективности и риски для других видов ценных бумаг. Результаты вычислений сведем в табл. 6.7.

Таблица 6.7. Эффективность и волатильность инвестиций

	Эффективность	**Волатильность**	**КИИЭ**
ГО	8	0,00	∞
КО	9,2000	0,84	11.0
проект 1	10,3000	4,39	2.3
проект 2	12	4,82	2.5

Видно, что проекты, содержащие риск, полностью проигрывают безрисковым инвестициям с фиксированным доходом. Это обусловлено тем, что, по мере перехода в зону рискованных инвестиций, волатильность результата растёт быстрее, чем ожидаемая доходность от вложений. Это накладывает на инвестиции, содержащие риск, требование отличаться по доходности безрисковых инвестиций, по крайней мере, в 2-3 раза, чтобы риск инвестирования был оправдан.

6.5. Вероятностные модели денежных потоков

В отличие от рентных проектов, где размеры поступлений и платежей определены заранее, существует большой класс экономических задач, в которых эти потоки точно определены быть не могут в принципе. В первую очередь, речь здесь идёт о задачах инвестиционного и финансового планирования. Что касается взаимоотношений с кредиторами и должниками, то здесь рентные проекты имеют фиксированные параметры. Но как только мы начинаем иметь дело с прямыми инвестициями или инвестициями финансового характера, ситуация стремительно теряет определённость, размывается. Мы можем заранее определить размер купонной выплаты. Но размер предстоящего дивиденда по акции уже не поддаётся точному определению. И уж подавно мы не сможем предсказать, какую выручку от продаж получит предприятие в будущем году. Соответственно, максимум неопределённости кроется в размерах будущих операционных потоков.

Также весьма характерным видом неопределённости является неопределённость в части фактических запасов минерального сырья на месторождениях. Когда рассматриваются планы по освоению месторождений, случайный уровень запасов сразу же влечёт случайность по стоимости извлекаемых запасов и в части ожидаемых от реализации извлечённых запасов денежных поступлений.

Чтобы снять хотя бы часть неопределённости, необходимо выдвинуть стартовые гипотезы об ожидаемых средних значениях денежных потоках и о волатильности этих потоков относительно предсказуемых средних результатов. Можно говорить о трендах как сигналах и о шуме как о характере отклонения результатов от ожиданий по тренду. Если наши высказывания носят частотный или субъективно-экспертный характер, мы можем рассматривать денежные потоки как случайные величины со своими распределениями. Максимальная экономия усилий по моделированию достигается, если рассматривать случайные величины потоков как нормально распределённые случайные величины, со своими матожиданием, дисперсией, СКО.

В этом случае, мы вправе искать результирующие показатели инвестиционных проектов (NPV, IRR, DPBP) как случайные величины, также обладающими своими вероятностными распределениями. Здесь очень помогает свойство аддитивности нормальных распределений. Ведь если умножить нормально распределённую величину на число, то результирующая случайная величина также распределена нормально. Нормально распределена и сумма (разность) нормально распределённых случайных величин. Если пренебречь неопределённостью, заложенной в ставку дисконтирования, то можно заявить, что вид NPV (4.4) позволяет рассматривать эту случайную величину нормально распределённой. И тогда инвестиционный риск – это вероятность того, что случайная величина NPV окажется меньше 0:

$$Risk1 = PrNeg1 = Pr\ \{NPV < 0\} = F_{NPV}\ (0), \qquad (6.13)$$

где F – функция распределения NPV, полученная по результатам инвестиционно-финансового моделирования.

Аналогичным образом, мы можем установить вид распределения случайной величины IRR. Здесь всё несколько сложнее, поскольку «нормальность» NPV вовсе не влечёт «нормальности» IRR. Но можно совершенно чётко заявить, что плотность распределения IRR – унимодальна, и матожидание IRR напрямую сопряжено с матожиданием NPV и может быть получено по (4.5), на матожиданиях рентных платежей. И здесь возникают предпосылки для «нормализации» вида закона распределения IRR (т.е. для аппроксимации этого закона нормальным распределением).

Если вид функции распределения IRR установлен, то справедливо

$$Risk2 = PrNeg2 = Pr\ \{IRR < i\} = F_{IRR}\ (i), \qquad (6.14)$$

где i – ставка дисконтирования денежных потоков. Тогда результирующий инвестиционный риск можно искать в виде

$$Risk = \max\ (Risk1, Risk2). \qquad (6.15)$$

Уровни рисков в вероятностной форме подлежат лингвистическому нормированию (см. параграф 1.3), с определением уровней допустимого, пограничного и неприемлемого рисков. Это нормирование может быть произведено в «жёсткой» и «мягкой» формах.

6.6. Нечётко-множественные модели денежных потоков

Существует огромное количество разновидностей инвестиционно-финансового планирования, где применение вероятностных распределений становится невозможным в принципе или неоправданным. Наиболее характерный пример тому – внедрение в проекты реальных опционов хеджирующего и форсирующего типов [9]. Эти опционы, направленные на усиление потока доходов или на отсечение убытков, существенно деформируют исходные распределения потоков, которые ещё могли бы рассматриваться как нормальные до внедрения опционов, а после такого внедрения – уже нет. Потеря «нормальности» вызывает невозможность получения аналитических распределений для NPV и IRR в принципе.

Зато открываются возможности для использования альтернативных, невероятностных моделей. То, что напрашивается немедленно – это рассматривать денежные потоки как интервалы или нечёткие числа общего вида. Для этого можно применить 3 основные модельные гипотезы:

- **Гипотеза «двухточки».** Рассматриваются 2 базовых сценария для моделирования – оптимистический и пессимистический. Все остальные возможные сценарии расположены между двумя базовыми. Соответственно, значения всех параметров модели плана располагаются в некотором интервальном диапазоне, от минимума до максимума. Тогда NPV и IRR – это тоже интервалы, и можно оценить риски неэффективности инвестиций, воспользовавшись формулой (1.27).
- **Гипотеза «трёхточки».** В модель добавляется третий сценарий – наиболее ожидаемая траектория развития событий, лежащая между оптимистическими и пессимистическими траекториями. Тогда каждый элемент денежного потока можно рассматривать как треугольное нечёткое число. Тогда NPV – треугольное число, а IRR – число, близкое к треугольному. В этом случае можно оценивать риски по формулам (1.22) – (1.26).
- **Гипотеза «трёхточка + опционы».** Внедрение опционов деформирует треугольные числа потоков, и тогда элементы потоков могут рассматриваться как кусочно-линейные числа (числа BL-вида). Такой же формой обладают числа NPV и IRR. Оценка рисков проекта на основе чисел такого рода может быть оценена с позиций наиболее общего представления нечёткого числа, с оценкой по сегментным интервалам [11, 16]. Более подробное раскрытие этого тезиса выходит за рамки настоящего учебного пособия.

Интервальное моделирование денежных потоков является самым грубым, первичным, эскизным приближением модели. Обычно риски, оцениваемые на основании интервальных представлений, оцениваются как неприемлемые. В этих случаях приходится либо уточнять исходные данные модели, либо отказываться от проведения проектов. С аналогичной ситуацией экономисты сталкиваются, например, при оценке проектов разработки месторождений; сложившийся уровень неопределённости не позволяет делать уверенные заключения об экономической обоснованности проектов (длительные сроки окупаемости, неприемлемо высокие уровни капиталовложений, низкий уровень отдачи на инвестированный капитал, сопоставимый с условиями безопасного банковского депозита).

Поэтому необходимо как можно скорее, в ходе построения плана, уточнять форму нечётких чисел денежных потоков на основе дополнительных соображений. Уже один только факт унимодальности этих чисел существенно снижает риски принятия инвестиционных решений. А учёт влияния опционов на потоки делает экономическую оценку проектов ещё более надёжной.

Выводы по разделу 6

Настоящий раздел выступает в качестве своеобразного мостика, по которому изложение учебного пособия переходит от изложения финансовых операций в детерминированной постановке задачки к финансовым операциям в условиях неопределённости. Можно сказать, что детерминированная оценка справедлива только для долговых финансовых операций, да и то в предположении неизменных макроэкономических условиях, в которых эти операции протекают. Уже на примере облигационного рентного проекта (см. предыдущий раздел) хорошо видно, как колебания внешних процентных ставок по долговым обязательствам существенным образом влияют на цену облигации и на риск владения ею. Если внешние ставки заимствований растут (например, ставка ЦБ РФ), то целесообразность инвестирования в долговые инструменты с фиксированной процентной ставкой снижается, и пробуждается новый интерес к ценным бумагам с переменным доходом (например, к акциям).

Первичное рассмотрение учёта неопределённости основывается на изложении теоретико-игрового подхода, когда в игре находятся два субъекта: инвестор и внешняя среда. Цель подхода – выбрать оптимальный сценарий инвестиционного решения, позволяющий либо максимизировать игровую прибыль, либо минимизировать убыток. Для определения таких сценариев используются критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа. Однако эти подходы рассматривают конечное множество сценариев и не учитывают вероятность события возникновения того или иного сценария из полной группы. В практических задачах финансового менеджмента множество реализаций внешней среды, как и множество сценариев инвестирования, является бесконечным и несчётным, а вероятностная или возможностная мера этих сценариев является непрерывной (или кусочно-непрерывной).

Поэтому, наряду с теоретико-игровыми подходами, учёт неопределённости финансовых операций совершается также и в вероятностной, интервальной, нечётко-множественной парадигмах анализа. Каждая из парадигм обладает своими локализованными областями применения, обладает своими сильными и слабыми сторонами. Очень многое в этом зависит от контекста сложившейся информационной неопределённости, от полноты и качества поставляемой в модель информации.

Вопросы для самопроверки

1. Что означает ситуация полной неопределенности?
2. В чем состоит критерий Вальда?
3. В чем состоит критерий Сэвиджа?
4. Запишите формулу ожидаемой доходности финансовой операции в условиях частичной неопределенности.
5. Какими критериями руководствоваться при оценке субъективных вероятностных рядов?
6. Запишите формулу волатильности финансовой операции в условиях частичной неопределенности.
7. При каких условиях можно рассматривать NPV как случайную величину с нормальным законом распределения?
8. При каких условиях можно рассматривать NPV как интервал?
9. При каких условиях можно рассматривать NPV как треугольное нечёткое число?
10. При каких условиях можно рассматривать NPV как число BL-вида?

РАЗДЕЛ 7. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

7.1. Оценка отдачи на собственный капитал (ROE). Формула Дюпона

Между анализом эффективности рентных проектов и оценкой стоимости бизнеса (проекта) лежит незримая, но весьма прочная связь. Чем выразительнее совокупный результат денежных потоков, тем выше чистая современная ценность (NPV) соответствующего инвестиционного проекта. В свою очередь, операционный результат бизнеса напрямую обуславливается способностью компании генерировать чистую прибыль. Именно чистая прибыль, в соотношении с инвестируемым в бизнес капиталом, является главным мерилом эффективности бизнеса или проекта, центральным определяющим моментом в оценке его стоимости.

Ключевым фактором для оценки эффективности использования собственного капитала организации является ROE – отдача на собственный капитал бизнеса, в процентах годовых:

$$ROE = ЧП/СК*100\%, \quad (7.1)$$

где ЧП – чистая прибыль в годовом выражении, СК – собственный капитал по состоянию на конец отчетного года.

Фактор ROE является одним из главных для принятия решений об инвестировании в стабильно работающий бизнес или решений о приобретении предприятия. Обычно принято сравнивать ставку ROE с уровнем доходности по банковскому депозиту (обычно не больше 10% годовых), с применением поправочных множителей, выражающих желаемую премию за риск для инвестора. Одной из методик оценки желаемого уровня ROE является исследование расположения компании в стратегической Бостонской матрице. Различают 4 класса предприятий:

- «знаки вопроса» или «стартапы» - вновь создаваемые предприятия с неясным будущим. Для таких компаний поправочный множитель может доходить до 10 (желаемое ROE = 100% годовых и выше);
- «звезды» - компании, опередившие своего главного конкурента и свою отрасль по темпам роста. Для таких компаний поправочный множитель колеблется в пределах от 2 до 4 (желаемое ROE = 20-40% годовых и выше);

- «дойные коровы» - предприятия, находящиеся в расцвете сил, но потерявшие темп своего развития (в сравнении с отраслью). Являются генераторами денежных потоков, и инвестиции в такие компании обладают минимумом риска. Поправочный коэффициент колеблется от 1.5 до 2 (желаемое ROE = 15-20% годовых и выше);
- «собаки» - компании, потерявшие свою рыночную ориентацию и движущиеся в направлении банкротства. Для них применяется не поправочный множитель, а дисконт к цене компании.

ROE также можно переписать как суперпозицию трёх факторов – чистой рентабельности (ЧР), оборачиваемости пассивов (ОбП) и финансового рычага (ФР):

$$ROE = ЧР * ОбП * (1 + ФР), \qquad (7.2)$$

причём

$$ЧР = ЧП / ВД, ОбП = ВД / П, ФР = ЗК / СК. \qquad (7.3)$$

Здесь ЧП – чистая прибыль, ВД – выручка без НДС, П – среднегодовой размер пассивов, ЗК – среднегодовой размер заёмного капитала. Запись (7.2) – одна из разновидностей **формул Дюпона**. Соотношение (7.2) получается из (7.1) последовательным домножением и делением (7.1) на два фактора: ВД и П, с перегруппировкой показателей.

Если компания имеет рыночную капитализацию, то рыночная стоимость ее акций отличается от балансовой стоимости собственного капитала (обычно в 2-3 раза и выше). И инвестиции в такую компанию совершаются не по балансовой, а по рыночной цене капитала. В этом случае целесообразно применять рыночные измерители эффективности капитала:

- Отдача на акционерный капитал (ROC), % годовых:

$$ROC = ЧП/Cap*100\%, \qquad (7.4)$$

где Cap – рыночная стоимость акций компании на конец отчетного года.

- Отношение «цена акции – чистая прибыль в расчете на одну акцию» (PE), лет:

PE = Cap / ЧП. (7.5)

- Отношение рыночной стоимости капитала к его балансовой стоимости (PB):

PB = Cap / СК. (7.6)

Из (7.5) и (7.6) вытекает:

PB = PE * ROE. (7.7)

Пример 7.1. Зафиксировано, что компания относится к категории «звезд» по Бостонской матрице, при этом ее ROE = 10% годовых. С каким рыночным дисконтом к балансовой цене следует входить в собственный капитал такой компании, чтобы обеспечить себе равновесные (паритетные) инвестиционные условия?

Решение. Поскольку желаемый уровень ROE для компаний этого класса составляет 20-40% годовых, то снижение цены вхождения в капитал от балансового уровня (дисконт) может колебаться от 50% до 75% от балансовой цены.

Пример 7.2. Для рыночной компании известно PE = 10, PB = 3. Какова отдача на собственный капитал ROE?

Решение. Из (7.7) следует:

ROE = PB/PE*100% = 30% годовых.

7.2. Трёхфакторный анализ ROE

Запишем (7.2) в обобщённом виде:

ROE = f (ЧР, ОбП, ФР). (7.8)

Пусть ROE оценивается в каждом из **двух лет** анализа: первом и втором. Тогда {ROE_1, $ЧР_1$, $ОбП_1$, $ФР_1$} – значения соответствующих показателей для первого года, {ROE_2, $ЧР_2$, $ОбП_2$, $ФР_2$} – значения для второго года.

Сравнивая наборы данных первого и второго года, можно определить корневые причины (драйверы) роста или спада по ROE, воспользовавшись одним из самых распространённых методов факторного анализа – методом цепных подстановок. Суть метода в следующем.

Можно определить отдельные вклады факторов в совокупный результат по ROE, применяя соотношения:

$$\Delta ROE\ (ЧР) = f\,(ЧР_2,\ ОбП_1,\ ФР_1) - f\,(ЧР_1,\ ОбП_1,\ ФР_1),$$

$$\Delta ROE\ (ОбП) = f\,(ЧР_2,\ ОбП_2,\ ФР_1) - f\,(ЧР_2,\ ОбП_1,\ ФР_1),$$

$$\Delta ROE\ (ФР) = f\,(ЧР_2,\ ОбП_2,\ ФР_2) - f\,(ЧР_2,\ ОбП_2,\ ФР_1), \qquad (7.9)$$

где f(*) определяется по (7.2) и (7.8).

Из (7.9) следует:

$$\Delta ROE\ (ЧР) + \Delta ROE\ (ОбП) + \Delta ROE\ (ФР) = f\,(ЧР_2,\ ОбП_2,\ ФР_2) -$$
$$- f\,(ЧР_1\ ,\ ОбП_1,\ ФР_1) = ROE_2 – ROE_1 = \Delta ROE, \qquad (7.10)$$

абсолютное отклонение по фактору ROE, по результатам сравнения двух лет. Определим влияние входных факторов на ROE в процентном выражении по формулам:

$$Влияние\ (ЧР) = \Delta ROE(ЧР)\ /\ \Delta ROE,$$

$$Влияние\ (ОбП) = \Delta\ ROE\ (ОбП)\ /\ \Delta ROE,$$

$$Влияние\ (ФР) = \Delta\ ROE\ (ОбП)\ /\ \Delta ROE,$$

$$Влияние\ (ЧР) + Влияние\ (ОбП) + Влияние\ (ФР) = 1 = 100\% \quad (7.11)$$

Пример 7.3. Организация показала в годах 1 и 2 следующие результаты хозяйственной деятельности (табл. 7.1):

Табл. 7.1. Результаты хозяйственной деятельности организации

Показатель	Год 1	Год 2	Отклонение
Чистая рентабельность (ЧР)	22%	42%	20%
Оборачиваемость пассивов (ОбП)	0.21	0.22	0.01
Финансовый рычаг (ФР)	0.27	0.26	-0.01
ROE, % год.	5.9%	11.7%	5.8%

Требуется определить, какие именно входные факторы модели ROE в основном обусловили прирост эффекта бизнеса в году 2.

Решение. Оценим вклады по (7.9).

ΔROE (ЧР) = (ЧР$_2$ – ЧР$_1$)*ОбП$_1$*(1+ФР$_1$) = 20% * 0.21 * 1.27 = 5.2% г.

ΔROE (ОбП) = (ОбП$_2$ – ОбП$_1$)*ЧР$_2$*(1+ФР$_1$) = 0.01 * 42% * 1.26 = 0.6% г.

ΔROE (ФР) = (ФР$_2$ – ФР$_1$)*ЧР$_2$*ОбП$_2$ = -0.01 * 42% * 0.22 = -0.01% г.

Видно, что львиную долю вклада в конечный результат вносит фактор чистой рентабельности. Это связано с ростом рынка и выручки. Но, поскольку компания пропорционально формировала источники финансирования и не активизировала заимствования, то факторы ОбП и ФР в приросте фактически не участвуют.

7.3. Соотношения для стоимости бизнеса нерыночных компаний

Справедливая (фундаментальная) стоимость бизнеса нерыночных компаний, обладающих положительным уровнем чистой прибыли, может быть оценена по формуле:

Value = PB * СК = СК * ROE * PE, (7.12)

причём данные СК и ROE для (7.12) берутся из финансовой отчётности компаний, а уровень PE задаётся экспертно, из макроэкономических соображений. Также целесообразно в качестве ROE принимать не последний отсчёт, а скользящее среднее за последние 2 квартала оценки.

Тогда, для условий российского бизнеса, оптимальными представляются следующие оценки стоимости:

Для ROE > 25% годовых Value = 10*СК*ROE;

Для ROE от 15% годовых до 25% годовых Value = 8.5*СК*ROE;

Для ROE от 0 до 15% годовых Value = 7*СК*ROE;

При отрицательных значениях ROE формула (7.12) неприменима. (7.13)

Условие (7.13) проистекает из результатов многолетнего анализа рациональных условий инвестирования в России, где PE лежит в диапазоне от 7 до 10 лет (на большие сроки окупаемости бизнеса инвесторы не соглашаются, вследствие высокого риск-фона для бизнеса).

Пример 7.4. Скользящее среднее ROE по бизнесу 30% годовых (бизнес локализован в России), среднегодовой размер собственного капитала СК = 300 млн. руб. Определить справедливую стоимость бизнеса и PB.

Решение. В соответствии с (7.13),

Value = 10*300*30% = 900 млн. руб.,

PB = PE * ROE = 10 *30% = 3.

7.4. Нечётко-множественная оценка стоимости бизнеса

Можно дать (7.12) нечётко-множественную интерпретацию, представив PE в форме треугольного нечёткого числа.

(Valuemin, Valueav, Valuemax)=СК*ROE*(PEmin, PEav, PEmax). (7.14)

Для условий инвестирования в России треугольное число PE = (7, 8.5, 10), для условий США PE = (10, 13, 16) (данные по 2012 году). Здесь представлены рациональные диапазоны, в рамках которых инвестирование является эффективным, как с точки зрения роста курсовой цены акций, так и с точки зрения их дивидендного выхода. Запись (7.14) рассматривает СК и ROE как быстро меняющиеся величины, а PE – как размытую константу (нечёткий инвестиционный фильтр для компаний).

Тогда Value – это тоже треугольное нечёткое число, дающее инвестору некоторый обоснованный разброс значений стоимости и наиболее рациональное значение для оценки.

Пример 7.5. Для условий примера 7.4 определить нечётко-множественную оценку его стоимости и оценить риск приобретения компании сторонним инвестором.

Решение. По (7.14)

$(Value_{min}, Value_{av}, Value_{max})$ =300*30%*(7, 8.5, 10)=(630, 765, 900) млн. руб.

Решение примера 7.4 даёт самую верхнюю (предельную) оценку стоимости бизнеса в 900 млн. руб. (цена продавца). Покупатель, приобретающий бизнес по такой цене, должен быть готов к тому, что некоторая доля инвестированного им капитала находится под риском. Размер капитала под риском (Value-at-Risk, VaR) можно оценить как разницу между предельной и среднеожидаемой ценой бизнеса (между ценой продавца и рациональной ценой покупателя):

$VaR = Value_{max} - Value_{av} = 900 – 765 = 135$ млн. руб.

Таким образом, в ходе торгов должна сложиться цена купли-продажи бизнеса, которая находится в диапазоне от $Value_{av}$ до $Value_{max}$. Предметов торга в этом случае два: а) упущенная выгода на стороне продавца; б) капитал под риском на стороне покупателя. Оба фактора должны быть минимизированы одновременно, что невозможно. Следовательно, необходимо найти паритет (разделить ожидаемые потери и выгоды).

7.5. Оценка стоимости бизнеса временно-убыточных компаний

Если компания убыточна, ROE < 0, и формула (7.12) не работает. Инвестор, который отваживается заходить во временно-убыточный бизнес, должен отдавать себе отчёт в том, что он должен осуществить инвестиции трёх видов:

- I1 – выкупить акции (доли) у прежних владельцев. Это и есть текущая стоимость временно-убыточной компании Value;
- I2 – повысить размер собственного капитала (СК). Обыкновением в убыточном бизнесе является то, что убытки выедают СК, в конце концов делая его отрицательным. Чтобы иметь возможность совершать финансовый манёвр (например, кредитоваться в банках), СК должен быть положительным;
- I3 – провести антикризисные мероприятия и понести связанные с этим издержки.

Итого $I = I_1 + I_2 + I_3$. (7.15)

По итогу проведённых инвестиций, инвестор рассчитывает на восстановление прибыльности и платёжеспособности организации. Это может быть выражено через рациональные требования к ожидаемой отдаче на инвестированный капитал. Например, если Т – период антикризисных преобразований, ЧП – прибыль за период преобразований нарастающим итогом, то можно говорить о нормативе:

$ROIC = ЧП / (I*T) > 20\%$ годовых. (7.16)

Тогда обратным счётом, зная расчётные ЧП, Т , I_2 и I_3, можно определить стоимость бизнеса перед преобразованиями:

$I < 5 * ЧП / Т$

$Value < 5 * ЧП / Т – I2 – I3.$ (7.17)

Пример 7.6. Инвестор покупает временно-убыточную компанию. На момент покупки компании её собственный капитал равен нулю («проеден»). В соответствии с финансовым антикризисным планом на Т = 5 лет чистая прибыль нарастающим итогом, после проведения всех антикризисных преобразований, составит ЧП = 50 млн. руб. При этом, в соответствии с планом, чтобы достичь плановых ориентиров по прибыльности бизнеса через 5 лет, необходимо произвести две инвестиции: в рост собственного капитала на I_2 = 10 млн. руб. и в проведение антикризисных мероприятий на I_3 = 20 млн. руб. (в порядке кредитования бизнеса под коммерческий процент). Определить предельную цену Value, по которой убыточный бизнес может быть приобретён у прежних владельцев.

Решение. В соответствии с (7.17),

Value < 5 * 50 / 5 – 10 – 20 = 20 млн. руб.

При этом совокупный размер инвестиций, по (7.15)

I = 20 + 10 + 20 = 50 млн. руб.,

а ROIC, в соответствии с (7.16), составляет ROIC = 50 / (50*5) = 20% годовых – нижняя граница норматива.

Также можно оценить ROE. Поскольку исходное значение СК = 0, а после довнесения инвестиций в размере I2 СК = 10 млн. руб., то среднегодовое ROE можно определить по формуле

ROE = ЧП / (СК * Т) = 50 / (10 *5) = 100% годовых.

Именно этот уровень ROE отвечает рациональным соображениям по инвестициям в «стартапы» (в смысле Бостонской матрицы, см. параграф 7.1). Действительно, временно-убыточный бизнес после реформирования очень сильно походит на «стартап», поскольку заново осваивает ранее уже занятые высоты, «переходит на второй год».

7.6. Оценка справедливой (фундаментальной) стоимости рыночных компаний, на примерах российских и американских корпораций

Иногда анализ соотношения справедливой (фундаментальной) и рыночной стоимости компаний даёт аналитику богатую пищу для размышлений о недооценённости или переоценённости торгуемых на биржах акций. Во всех случаях, эти аналитические выкладки должны брать в расчёт сложившиеся на страновом и мировом рынках рациональные условия инвестирования в финансовые активы, а также существенные риски, которые содержатся внутри самой компании, как проявления её слабостей.

Пример 7.7. Рассмотреть динамику и соотношение рыночной и фундаментальной стоимости ОАО «ГАЗПРОМ» в 2011 – 2012 г.г. Требующиеся для анализа фундаментальные и рыночные данные сведены в таблицу 7.2.

Табл. 7.2. Рыночные и фундаментальные данные по ОАО «ГАЗПРОМ» в 2011 – 2012 г.г.

Показатели	2011 г.	2012 г.
Валовый доход, тыс. руб.	3 534 341 431	3 659 150 657
Чистая прибыль, тыс. руб.	882 120 858	556 340 354
Пассивы, тыс. руб.	9 521 274 120	10 035 651 782
Собственный капитал (СК), тыс. руб.	7 539 089 895	7 883 096 524
Чистая рентабельность, %	25%	15%
ОбП, раз в год	0.37	0.36
Финансовый рычаг, б/р	0.26	0.27
ROE, % годовых	11.7%	7.1%
Справедливая стоимость бизнеса, тыс. руб.	6 174 846 006	3 894 382 478
Рыночная капитализация, тыс. руб.	128 000 000	112 258 271
ROC, % годовых	22.3%	16.0%
PE, лет	4.5	6.3
Соотношение справедливой стоимости и рыночной капитализации	1.6	1.1

Решение. Видно, что, несмотря на незначительный рост выручки, холдинг сильно потерял в рентабельности. Соответственно, ROE по бизнесу упало более чем в 1.5 раза. Это немедленно отразилось как на текущей рыночной капитализации, так и на справедливой стоимости бизнеса.

Пример 7.8. Рассмотреть динамику и соотношение рыночной и фундаментальной стоимости компании British Petroleum в 2010 – 2012 г.г. Требующиеся для анализа фундаментальные и рыночные данные сведены в таблицу 7.3.

Табл. 7.3. Рыночные и фундаментальные данные по компании British Petroleum

Показатели	2010 г.	2011 г.	2012 г.
Валовый доход, млн. долл.	297 107	375 517	375 580
Чистая прибыль, млн. долл.	-3 324	26 097	11 816
Пассивы, млн. долл.	272 262	293 068	300 193
Собственный капитал (СК), млн. долл.	94 287	111 465	118 414
Чистая рентабельность, %	-1%	7%	3%
ОбП, раз в год	1.09	1.28	1.25
Финансовый рычаг, б/р	1.89	1.63	1.54
ROE, % годовых	-3.53%	23.41%	9.98%
Справедливая стоимость бизнеса, млн. долл.	нет	260 970	118 160
Рыночная капитализация, млн. долл.	144 000	137 600	138 000
ROC, % годовых	-2.3%	19.0%	8.6%
PE, лет	нет	5.3	11.7
Соотношение справедливой стоимости и рыночной капитализации	нет	1.9	0.9

Решение. Мы видим компанию мирового уровня, которая использует свои активы в 4 раза эффективнее, чем ОАО «ГАЗПРОМ», исходя из оборачиваемости пассивов; при тех же самых размерах активов, компания генерирует в 4 раза больше выручки. Авария в Мексиканском заливе (апрель 2010 г.) не убила компанию (как ожидали многие), но принесла ей убытки, растянутые во времени (возникли новые существенные затраты на погашение нанесённых ущербов). Тем не менее, компания выровнялась, вернулась к прибыльности. И можно сказать, что в 2012 г. наступила стагнация. При том же уровне выручки, что и в 2011 году, прибыль оказалась в 2.5 раза меньше. Рынок оценил эту стагнацию и застыл в ожидании дополнительных сигналов, совершая колебания в диапазоне 40 – 43 долл. за акцию (долгосрочный боковой тренд).

В качестве расчётного PE для оценки справедливой стоимости бизнеса был взят уровень PE = 10 (предельно низкий норматив для американского фондового рынка). Но в 2011 году рынок акций BP пробил этот норматив вниз, до уровня PE = 5.5 (примерно такой же уровень показал и «Газпром» в этом же году). Ухудшение ситуации по ROE в 2012 году вызвало падение справедливой цены до уровней, близким к текущей капитализации. Тем не менее, такое ROE (9% годовых) не является инвестиционно-приемлемым.

Финансовый рычаг в компании составляет 1.6 – в 5 раз больше того же по «Газпрому». Это говорит о том, что западные компании активнейшим образом используют леверидж, зарабатывая на этом. «Газпрому» ещё только предстоит этому научиться. Зато у «Газпрома» есть существенный задел по чистой рентабельности. Но этот задел не даёт компании совершить отскок по цене, пока не будет пересмотрена политика управления активами и их оценивания.

Выводы по разделу 7

Как уже упоминалось, традиционная финансовая математика не рассматривает вопросы оценки стоимости бизнеса. Однако, с нашей точки зрения, этот вопрос, наряду с классической оценкой стоимости активов, должен занять своё достойное место в образовательной программе. Если вопрос учёта неопределённости – это вопрос стыка между полностью обусловленными и слабо обусловленными финансовыми операциями, то вопрос оценки стоимости бизнеса – это стык между рыночной оценкой бизнеса на макроуровне, в ходе публичного признания деятельности компании, и внутренней справедливой (паритетной) оценкой стоимости бизнеса, основанной на анализе фундаментальных факторов бизнеса.

Разрыв между рыночной и внутренней оценкой бизнеса порождает феномены недооценённости или переоценённости бизнеса, которые должны найти свою проекцию, как в решениях внешних инвесторов, так и в решениях директоров оцениваемой компании. Эти решения могут быть обоснованы лишь в том случае, когда обе оценки будут прозрачными, основанными на фактических данных по рынку или по компании, применять обоснованные с научной точки зрения методики оценки. В настоящем разделе такие методики приводятся, с позиций внутренней оценки стоимости. Что касается рыночной оценки, то её анализ производится методами, изложенными в части 2 настоящего учебного пособия.

Предложенные схемы оценки стоимости бизнеса рассмотрены на примере двух крупных холдингов: ОАО «ГАЗПРОМ» и компании British Petroleum. Показано, какие драйверы стоимости, в соответствии с формулой Дюпона, оказывают решающее влияние на оценку стоимости.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое справедливая (фундаментальная) стоимость бизнеса? Чем она отличается от рыночной стоимости?
2. Почему ROE является главным драйвером в оценке стоимости?
3. Какие факторы определяют уровень ROE в соответствии с моделью Дюпона?
4. Почему справедливая стоимость бизнеса может быть ниже балансовой оценки стоимости собственного капитала?
5. В каком диапазоне PE рационально оцениваются российские компании? А американские?
6. Можно ли оценивать справедливую стоимость временно-убыточных компаний? Если да, то на какой основе?
7. Почему акции ОАО «ГАЗПРОМ» торгуются дешевле собственного капитала?
8. Какая, основная финансовая проблема в компании British Petroleum на 2012 г.?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ЧАСТИ 1 ПОСОБИЯ

В части 1 общего пособия изложен предмет финансовой математики в узком смысле, без привлечения вопросов анализа и моделирования финансовых рынков. Стык между рыночными и корпоративными финансовыми решениями проходит по линии оценки справедливой (фундаментальной) стоимости бизнеса; в данном контексте этот стык выстроен и надлежащим образом описан.

Все приведённые в пособии модели и методы финансовой математики не нуждаются в дополнительном программировании (могут быть реализованы на основе таблиц Excel). Большое подспорье в этом отношении предоставляют стандартные финансовые программы Excel, синтаксис которых в пособии надлежащим образом описан.

От финансовых решений, совершающихся в условиях полной определённости, пособие плавно переходит в область плохо формализованных и слабо предсказуемых с точки зрения финансового результата решений. Но настоящий расцвет «математики неопределённости» ждёт студентов в части 2, который является логическим продолжением данной части 1.

Последний существенный научный результат классической финансовой математики, касающийся «математики определённости», был получен в 30-х годах прошлого века, и касался он определения модифицированной дюрации. С тех пор вектор научных исследований устремился в область плохо обоснованных финансовых решений, совершающихся в условиях неопределённости. Там же сосредоточено большинство теоретических и методологических проблем, самой существенной из которых, на наш взгляд, остаётся употребление вероятностных моделей, без должного обоснования применимости таких моделей при отсутствии статистической однородности исследуемых событий. Замещение вероятностных описаний нечётко-множественными, применительно к анализу финансовых решений, ещё только начинается (подход насчитывает всего два – три десятка лет, что с позиций математической науки весьма немного).

Рекомендации при изучения курса следующие. Студентам необходим устойчивый навык работы с моделями финансовой математики, созданными в Excel, причём применяемые модели должны постоянно усложняться. В настоящем пособии изложены лишь азы финансового моделирования. Настоящий взрыв сложности студентов ждёт при переходе к анализу рынков, и именно туда они должны направить своё пристальное внимание.

Финансовая математика развивается одновременно по нескольким векторам. Один из векторов уже был назван, и он касается движения дисциплины в область «математики неопределённости». С другой стороны, финансовая математика крепит свои связи со смежными дисциплинами, прежде всего с финансовым анализом и планированием (в настоящем пособии можно встретить множественные отсылки к результатам этих дисциплин). Ещё один важный вектор финансовой математики – это углублённое изучение вновь возникающих на рынке финансовых инструментов. Полноформатное оценивание классических фьючерсов и опционов проводится уже лет сорок. Однако появляются новые особенности применения этих инструментов в бизнесе. Сейчас структурируется новая дисциплина, касающаяся реальных опционов и их имплантирования в бизнес.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Брейли Ричард, Майерс Стюарт. Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс, М.: ЗАО «Олимп-бизнес», 2009 г.
2. Бригхэм Ю., Эрхард М. Финансовый менеджмент / Ю. Бригхэм, М. Эрхард. - СПб.: Питер, 2009 г.
3. Иванов В.В., Цытович Н.Н. Корпоративное финансовое планирование / В.В. Иванов, Н.Н. Цытович - СПб.: БАН; Нестор-История, 2010 г.
4. Карпов А.Е. Бюджетирование как инструмент управления. Книга 1 / А.Е. Карпов - М.: Результат и качество, 2007г.
5. Мамедова Т. Ф. Егорова Д. К. Финансовая математика / Т.Ф. Мамедова, Д. К. Егорова – Саранск: Морд.ГУ, 2008. – 88 с.
6. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Модели и методы финансового планирования. – СПб, СПбГПУ, 2013. – 172 с.
7. Финансовая математика: учебно-методический комплекс / сост. Г.Г. Ткаченко [и др.] – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 156 с.
8. Четыркин Е.М., Финансовая математика. Учебник / Е.М. Четыркин – М.: Изд-во «Дело АНХ», 2010.

Дополнительная литература:

9. Абдулаева З.И., Недосекин А.О. Стратегический анализ инновационных рисков / З.И. Абдулаева, А.О. Недосекин, СПб: Изд. Политехн. ун-та 2013г. - 146 с.
10. Бочаров В.В. Инвестиции: учебник для вузов/В.В. Бочаров - 2-е изд. СПб.: Питер, 2009.
11. Недосекин А.О. Риски бизнеса и их измерение (2004) / http://sedok.narod.ru/ s_files/2004/5.pdf.
12. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Нечеткая модель для оценки справедливой стоимости рыночных и нерыночных компаний //

А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева - Аудит и финансовый анализ №2, 2012, №2.

13. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Оптимизация инвестиционных портфелей с реальными опционами // А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева - Аудит и финансовый анализ, 2013, №1.
14. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Справедливая оценка стоимости временно-убыточных компаний//А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева - Аудит и финансовый анализ, 2012, №4.
15. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Учёт рисков и шансов при оценке стоимости компаний (нечёткий подход) // А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева - Аудит и финансовый анализ №2, 2012, №2.
16. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: учебник / Г.В. Савицкая –5-е изд. М.: ИНФРА-М, 2009.
17. Станиславчик Е.Н. Бизнес-план. Управление инвестиционными проектами / Е.Н. Станиславчик – 2-е изд. - М.: Ось-89, 2009.
18. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости. – М.: Наука, 1981. Также в режиме доступа: http://www.arhibook.ru/1116-modeli-prinjatija-reshenijj-v-uslovijakh.html .

Интернет - источники:

19. Агапов С.Е. Финансовая математика / Электронное пособие. Режим доступа: http://www.finmath.ru .
20. Инвестиционный калькулятор для оценки рисков. Режим доступа: http://sedok.narod.ru/inv_risk_calc.html
21. Малыхин В.И. Финансовая математика / Электронная версия учебника. Режим доступа: http://www.finansmat.ru
22. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Проблема лихвы в духовной экономике // http://an.ifel.ru/docs/Riba_0.doc.

ГЛОССАРИЙ ЧАСТИ 1

Агрессивный инвестор – такой, для которого ожидаемая доходность инвестиций является наиболее значимым критерием, а риск инвестиций выступает в качестве слабого ограничения.

Банковский учет заключается в получении банком денежных обязательств, например векселя, по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы.

Брутто-ставка - ставка процента, которая компенсирует обесценивание денег.

Вероятность – 1) в частотном смысле – относительная частота происходящих событий в определённой группе; 2) в субъективном смысле – экспертная оценка ожидаемости тех или иных сценариев.

Внутренняя норма доходности IRR (Internal Rate of Return) представляет собой процентную ставку, при которой чистый приведенный доход $NPV = 0$.

Возможность – экспертная оценка ожидаемости тех или иных реализаций, мера экспертной уверенности в том, что значения параметров будут колебаться в предустановленном диапазоне.

Волатильность – уровень глубины колебаний параметра во времени.

Выкупная цена облигации Q – эта сумма, которую выплачивают при погашении облигации.

Градации – качественные уровни лингвистической переменной (значения из её терм-множества). Например: {ОН, Н, Ср, В, ОВ}.

Дисконтирование позволяет учитывать в финансовых операциях фактор времени, как обесценение реальной стоимости денежных потоков.

Дисперсия финансовой операции – дисперсия ее случайной доходности ξ. Второй центральный момент вероятностного распределения случайной величины ξ.

Дюрация по Маколею – взвешенное среднее моментов поступления платежей облигации.

Индекс цен J_p показывает, во сколько раз изменились цены за период наращения.

Интервал сглаживания – число предшествующих наблюдений цены, которые входят в скользящее среднее.

Инфляционная премия – величина $h + ih$, h – темп инфляции.

Коэффициент наращения ренты определяется формулой $s_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Коэффициент приведения ренты определяется формулой $a(i,n) = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Консервативный инвестор – такой, для которого главным критерием является минимум риска операций, а доходность активов выступает слабым ограничением.

Критерий Вальда (крайнего пессимизма) – критерий выбора финансовой операции, когда инвестор рассчитывает на самый «худший» ее исход и максимизирует в этих условиях свой доход.

Критерий Сэвиджа (минимального риска) – критерий выбора финансовой операции, когда инвестор рассчитывает на минимальный риск в условиях выбора максимально возможного уровня дополнительного дохода.

Купонная процентная ставка облигации q – процент от номинала облигации.

Курс облигации – цена одной облигации P в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Кусочно-линейное число (число BL-вида) – такое, функция принадлежности которого представляет является кусочно-линейной. Разновидности чисел BL-вида: интервальное, треугольное, трапециевидное.

Лингвистическая переменная – математический объект, в состав которого входят носитель, терм-множество градаций и набор функций принадлежности носителя градациям.

Лингвистический классификатор – лингвистическая переменная, удовлетворяющая критерию серой шкалы Поспелова.

Линия поддержки – это линия, ниже которой цена не должна опускаться.

Линия сопротивления – это линия, выше которой цена не должна подняться.

Математическое ожидание – первый начальный момент вероятностного распределения.

Модифицированная дюрация (волатильность цены) определяется равенством $MD = -\frac{\partial \ln P}{\partial i}$. $P(i)$ – цена облигации при исходной доходности *i*.

Моменты вероятностного распределения – числовые характеристики распределения, характеризующие его форму. Различают начальные и центральные моменты k-го порядка.

Мягкие вычисления – операции с сегментными интервалами принадлежности нечётких чисел, основанные на правилах интервальной арифметики Дюбуа-Прада.

Наращение – процесс увеличения суммы денег во времени путем присоединения процентов.

Наращение по простой процентной ставке – процентные деньги начисляются от первоначальной суммы.

Наращение по сложной процентной ставке – процентные деньги начисляются от всей накопленной к этому моменту суммы.

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо определяется формулой $S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Наращенная сумма годовой ренты пренумерандо определяется формулой $S^{np} = R(1+i)^n + r(1+i)^{n-1} + \cdots + R(1+i)$.

Наращенная сумма годовой ренты с начальным взносом определяется формулой $S = P_0(1+i)^n + R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Непрерывное дисконтирование – дисконтирование, когда число начислений процентов ***m*** стремится к бесконечности.

Непрерывное начисление процента – наращение, когда число начислений процентов ***m*** стремится к бесконечности.

Нечёткие множества – множества, принадлежность элементов к которым в общем случае не может быть определена однозначно (с полной уверенностью). Примеры – лингвистические переменные, нечёткие числа.

Номинальная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая применяется ***m*** раз в году.

Номинальная цена или номинал *N* облигации – это стоимость облигации, объявленная в момент выпуска.

Носитель лингвистической переменной – дискретное или непрерывное подмножество вещественных чисел.

Ожидаемая доходность (**эффективность)** финансовой операции – это математическое ожидание ее случайной доходности ξ.

Основной долг кредита – сумма кредита (тело кредита).

Оценка риска равна стандартному отклонению по всем ***n*** наблюдениям.

Оценка средней доходности финансовой операции равна среднему арифметическому фактических доходностей по всем ***n*** наблюдениям.

Период начисления процентов – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка.

Плотность распределения – производная от кумулятивной функции распределения случайной величины.

Полная доходность облигации равна внутренней ставке дохода инвестиционного проекта, определяемого доходами облигации.

Полная доходность облигации с нулевым купоном равна

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{N}{P}}} - 1.$$

Полная неопределенность характеризуется полным отсутствием информации о будущем состоянии экономики.

Постнумерандо – ренты, в которых платежи осуществляются в конце соответствующих периодов.

Поток платежей – это последовательность значений самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществляются.

Пренумерандо – ренты, в которых платежи производят в начале указанных периодов.

Приведенная (современная) стоимость по простой процентной ставке определяется формулой $P = \frac{S}{1 + i \cdot t}$.

Приведенная (современная) стоимость по сложной процентной ставке определяется формулой $P = \frac{S}{(1 + i)^n}$.

Простая годовая учетная ставка (ставка дисконта) – отношение процентных денег к номинальной сумме $d = \frac{D}{S}$.

Промежуточный инвестор – такой, для которого цели по доходности и по риску являются равнозначными. В зависимости от ситуации, один из критериев может выступить как цель, а второй – как ограничение.

Процентная ставка – отношение дохода (процентных денег) к сумме долга (капитала) за фиксированный промежуток времени.

Риск – возможность того, что случайная величина оказывается меньше заведомо установленного норматива. Обозначение: Risk = Poss { X < L}.

Ряд распределения – набор частот попадания испытаний в предустановленные диапазоны (ячейки). Сумма частот ряда распределения равна единице.

Серая шкала Поспелова – лингвистический классификатор, удовлетворяющий набору дополнительных условий: а) уверенность в принадлежности к градации падает тем же темпом, что нарастает уверенность в смежной градации; б) максимальная уверенность (функция принадлежности) равна единице; в) максимум неопределённости в классификации отвечает уровню принадлежности 0.5. Свойству серой шкалы Поспелова отвечает классификатор на трапециевидных нечётких числах.

Скользящее среднее – среднее арифметическое цен за определенное количество дней.

Современная стоимость ***годовой ренты пренумерандо*** равна

$$P^{np} = \frac{R}{(1+i)^0} + \frac{R}{(1+i)^1} + \cdots \frac{R}{(1+i)^n}.$$

Современная стоимость ***годовой ренты постнумерандо*** определяется формулой $P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Современная стоимость ренты с взносом в конце срока равна

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} + R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Справедливая (фундаментальная) стоимость бизнеса – оценка стоимости, базирующаяся на фундаментальных факторах бизнеса и на сложившемся уровне признания инвестиций рациональными.

Срок окупаемости – число лет, за которое сумма доходов (с учётом или без учёта фактора дисконтирования) равна размеру инвестиций. Простой срок окупаемости – PBP (pay-back period). Дисконтированный срок окупаемости – DPBP (discounted pay-back period).

Темп инфляции *h* – относительный прирост цен за рассматриваемый период.

Терм-множество лингвистических переменных – набор качественных градаций, образующих полную группу с точки зрения оттенков описания предмета или процесса.

Трапециевидные числа – нечёткие множества, определённые на вещественном носителе, функция принадлежности которых имеет вид трапеции.

Треугольные числа – нечёткие множества, определённые на вещественном носителе, функция принадлежности которых имеет треугольный вид.

Финансовая рента (аннуитет) – поток платежей с постоянными промежутками между ними.

Функция принадлежности (функция уверенности) – атрибут нечёткого множества. Изменяется от 1 (полная уверенность в принадлежности) до 0 (полная уверенность в непринадлежности). Определена на носителе нечёткого множества.

Функция распределения – вероятность того, что случайная величина X меньше заранее предустановленного значения x. Обозначение: $F(x) = \Pr\{X < x\}$.

Чистым приведенным доходом (чистой современной ценностью проекта) *NPV* называется разность дисконтированных показателей дохода и инвестиционных затрат.

Эквивалентность денежных средств – равенство их приведенных стоимостей.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке $\boldsymbol{j / m}$.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Русские обозначения и сокращения

ВД – валовый доход (выручка без НДС) за период

ОбП – коэффициент оборачиваемости пассивов

П – среднегодовой размер пассивов

СК – собственный капитал

ФР – финансовый рычаг

ЧП – чистая прибыль за период

Англоязычные сокращения

av – среднее значение параметра

Cap – рыночная капитализация бизнеса

D – дюрация облигации

DX – дисперсия случайной величины х

F – кумулятивная функция распределения случайной величины.

Или: шифр финансового решения в задачах с неопределённостью

f – плотность распределения случайной величины

I – инвестиции

i – ставка дисконтирования

IRR – внутренняя ставка доходности проекта

L – нормативный уровень параметра.

m – частота наращения или дисконтирования денежных сумм (раз в год)

max – максимальное значение параметра

MD – модифицированная дюрация облигации

min – минимальное значение параметра

MX – математическое ожидание случайной величины X

n – число периодов рентных платежей

NPV – чистая современная ценность проекта

P – приведённая стоимость ренты

p – вероятность (член ряда распределения).

Или: частота рентных платежей (раз в год)

PB – отношение стоимости бизнеса к балансовой стоимости собственного капитала

PE – отношение стоимости бизнеса к годовой чистой прибыли

Poss – возможность

Pr – вероятность

PrNeg – вероятность негативного исхода событий

Q – выкупная стоимость облигаций

q – процентная ставка купонного платежа

R – элемент финансовой ренты

Risk - риск

ROIC – отдача на инвестированный капитал

ROC – отдача на капитализацию бизнеса

ROE – отдача на собственный капитал

S – наращенная стоимость ренты

T, t – временной интервал

X – случайная величина

Греческие обозначения

α - уровень функции принадлежности, по которому строится сегментный интервал

Δ - символ отклонения, разности

δ - дельта-функция Дирака

λ - обозначение для частного интервального риска в составе общей оценки риска

σ - среднеквадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии)

ξ - случайная величина доходности финансовой операции

ЧАСТЬ 2.

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

ВВЕДЕНИЕ ПО ЧАСТИ 2 ПОСОБИЯ

Всё, что изучается в рамках части 1 пособия, формирует у студентов первичное представление о сути финансовых операций, совершаемых, в основном, с заранее предсказуемым результатом. Здесь же, в рамках второй части пособия, студентам предстоит изучить основы моделирования финансовых решений в условиях частичной или полной рыночной неопределённости. Считается, что студенты уже вполне освоили технику простейших финансовых операций и хорошо помнят те разделы высшей математики, которые касаются теории вероятности, теории нечётких множеств и мягких вычислений. К специальным «управленческим» разделам, в которые необходимо погрузиться во время изучения настоящего курса, относятся теория принятия решений в условиях неопределённости и теория рисков.

Назначение части 2 – систематически изложить вопросы, относящиеся к операциям на финансовых рынках в условиях существенной рыночной неопределённости, когда оценивается потенциальная эффективность и риск таких операций. Это могут быть операции как с отдельными финансовыми инструментами, так и с их совокупностями (портфелями).

Авторский подход, применённый при составлении части 2 пособия, основывается на следующем:

- за скобками настоящего курса сознательно оставлены вопросы, касающиеся анализа рынка банковских капиталов. Этим вопросам посвящено содержание специального курса «Деньги, кредит, банки»;
- в пособии минимальным образом освещены вопросы, связанные с техническим анализом рынков. Во многом, это обусловлено профессиональным выбором авторов, который они в своё время сделали между фундаментальными и техническими принципами анализа финансовых рынков, в пользу первых. Нам представляется, что долгосрочное движение рынков обусловлено, в основном, изменением макроэкономических пропорций, а это – предмет исследования фундаментального анализа. Краткосрочные колебания рынков интересуют нас, как учёных, в значительно меньшей степени;
- чрезвычайная насыщенность дисциплины высокоуровневой специализированной математикой подвигла авторов к

самоограничению и к удалению из курса чрезвычайно сложных математических моделей финансового рынка, которые, при всей своей красоте, весьма трудны для восприятия, даже на уровне готовых специалистов в этой области. У авторов настоящего пособия есть хорошие модельные результаты (например, в [3]), но большинством их пришлось пожертвовать, во имя упрощения изложения. Поэтому акцент был сделан на освещении традиционных моделей, которые уже заработали себе репутацию в финансовом мире и легли в основу последующих научных открытий (в том числе, заслуживших Нобелевскую премию в области экономики).

Ключевым фактором успеха усвоения данного курса является воспроизведение всех приведённых в пособии расчётных примеров в таблицах Excel, как с использованием стандартных программ, так и при самостоятельной настройке формул. Опыт преподавания дисциплины «Анализ и моделирование финансовых рынков» в Горном университете (Санкт-Петербург) показывает, что закрепление материала может быть реализовано только в ходе компьютерных лабораторных работ, объём которых в почасовом выражении равен или превышает объём прочитанных лекций. В рамках настоящего пособия не предложено ни одной модели, которая не могла бы быть реализована средствами Excel или аналогичного табличного процессора.

Предмет дисциплины «Анализ и моделирование финансовых рынков» – оценка доходности и риска финансовых операций, совершаемых в условиях рыночной неопределённости. Обозначенные вопросы рассматриваются под углом зрения двух не связанных друг с другом модельных парадигм: вероятностной и нечётко-множественной. Оцениваются доходность и риск как отдельных инструментов, так и их совокупностей – финансовых и фондовых портфелей.

Все ключевые термины части 2 сведены в Глоссарий, расположенный в конце пособия. Термины в тексте вводятся поэтапно, по мере изучения соответствующих разделов дисциплины. Также актуальными являются термины, приведённые в глоссарии части 1 настоящего пособия.

РАЗДЕЛ 1. ФИНАНСОВЫЕ РЫНКИ И ИХ АНАЛИЗ

1.1. Понятие финансового рынка

Финансовый рынок – это совокупность отношений, возникающая в процессе обмена экономических благ, с использованием денег и денежных эквивалентов в качестве актива-посредника. При этом, финансовые рынки складываются по поводу формирования и перехода прав собственности на экономические блага, а также в связи с формированием долговых отношений. Указанные права в ходе структурирования рыночных отношений начинают жить своей самостоятельной жизнью, оборачиваясь на рынках по особым правилам и представляя собой структурированные и поддержанные законодательством финансовые инструменты. При этом связь этих финансовых инструментов с экономическими благами, по поводу которых эти инструменты были созданы, становится всё более и более опосредованной, по мере того как финансовые инструменты меняют своих первых владельцев и одновременно видоизменяют свою природу. Из средств удостоверения прав они превращаются в средство накопления капитала, в средство самостоятельного обмена, в инструменты страхования (хеджирования) рисков или увеличения (форсирования) будущих доходов, даже в средство залога в операциях банковского кредитования или частного заимствования.

Финансовые рынки чётко сегментированы, в зависимости от вида совершаемых в их рамках операций и обращающихся на этих рынках финансовых инструментов. Различают следующие виды рынков:

- Рынок капитала, в том числе:
    - Рынок акционерного капитала (рынок акций);
    - Рынок долгового капитала (рынок облигаций и векселей).
- Денежный рынок.
- Рынок производных финансовых инструментов (деривативов).
- Валютные рынки (форекс, своп).

Каждый из указанных рынков характеризуется набором ключевых параметров, таких как объём инвестирования, объём торгов, доходность, волатильность, наличие или отсутствие тенденции и др.

1.2. Виды ценных бумаг и денежных финансовых инструментов

Все ценные бумаги и денежные финансовые инструменты можно разделить на три большие группы:

- **Обыкновенные и привилегированные акции.** Эти инструменты права собственности на долю в бизнесе и обладают нефиксированным доходом из двух источников: курсовой рост и дивидендные выплаты.
- **Долговые инструменты.** Сюда относятся государственные и корпоративные облигации различной природы, а также товарные и финансовые векселя. Доход по этим инструментам возникает в следующих случаях: при погашении после приобретения инструмента с дисконтом; разница между номиналом инструмента и ценой погашения; получение промежуточных процентных выплат (если предусмотрено инструментом). Сюда же относятся банковские депозитные сертификаты. Номинальный размер текущей (процентной) доходности долговых инструментов всегда известен заранее (оговорён в соответствующих контрактах).
- **Производные финансовые инструменты.** Они выпускаются по поводу прав на получение доходов, связанных с ценовыми колебаниями активов, по поводу которых эти деривативы были выпущены. Если речь идёт о реальных биржевых ценностях (товарных или денежно-валютных), то основной класс деривативов, связанных с такими ценностями – это фьючерсы. Если в качестве базового актива выступает инструмент фондового рынка (акция или облигация), то в качестве производного к нему инструмента выступает фондовый опцион (не путать с реальными опционами, возникающими в ходе прямых инвестиций в проекты реального сектора).

Более подробно содержание финансовых инструментов излагается в курсе «Рынок ценных бумаг».

1.3. Классификация подходов, используемых в ходе анализа и моделирования финансовых рынков

Если объектом научного исследования является финансовый рынок, рассматриваемый с точки зрения своей ёмкости, объема регулярных торгов, наличной и прогнозируемой динамики, то существуют две основные парадигмы для анализа – технический анализ и фундаментальный анализ. Технический анализ оценивает курсовую динамику рынков вне связи с экономической природой тех базисных ценностей, по поводу которых этот рынок сформирован. Напротив, фундаментальный анализ устанавливает связь между тенденциями на финансовых рынках (следствие) и положением рыночных субъектов – эмитентов соответствующих ценных бумаг. Также фундаментальный анализ оценивает рынки с позиций макроэкономических условий, в рамках которых данные рынки сформировались и функционируют.

Если анализируется отдельный финансовый инструмент, то это может быть сделано в рамках двух парадигм: вероятностной и нечётко-множественной. Вероятностная модель полагает, что доходность финансового инструмента – это случайная величина, обладающая своим устойчивым законом распределения. Тогда оценка доходности и риска вытекает из анализа функции распределения. В свою очередь, нечётко-множественная модель актива предполагает, что использование вероятностных распределений невозможно (по ряду оснований), и надо интерпретировать доходность финансового инструмента как нечёткое число определённой природы.

Когда исследование переносится с отдельного инструмента на их совокупность, то анализу подлежит уже финансовый портфель, рассматриваемый с позиций единого целого. С более общих позиций, любой финансовый рынок можно интерпретировать как многоуровневый финансовый портфель. В связи с этим, к анализу привлекаются специализированные модели и методы портфельного анализа, первыми из которых можно считать модель оптимизации портфеля по Марковицу и оптимальный выбор по Парето. В настоящем курсе эти ранние модели анализа рассматриваются подробно.

1.4. Принципы технического анализа рынков

Материал настоящего параграфа излагается по [28].

Технический анализ — прогнозирование изменений цен в будущем на основе анализа изменений цен в прошлом. В его основе лежит анализ временных рядов цен — «чартов» (от англ. chart). Помимо ценовых рядов, в техническом анализе используется информация об объёмах торгов и другие статистические данные. Наиболее часто методы технического анализа используются для анализа цен, изменяющихся свободно, например, на биржах.

В техническом анализе множество инструментов и методов, но все они основаны на одном предположении: из анализа временных рядов, выделяя тренды, можно спрогнозировать поведение цен.

Технический и фундаментальный анализ — основные школы анализа ценных бумаг.

Существуют различия в методах технического анализа на форексе и на биржевом фондовом рынке. Например, на валютном рынке сделки заключаются между банками, и объёмы операций не публикуются, каждый банк может публиковать лишь свои котировки, сделки происходят круглосуточно, исключая выходные дни. На биржах цены и объёмы сделок публикуют специальные комиссии, торговля ведётся в рамках времени торговых сессий. Тем не менее, общие принципы технического анализа на всех рынках одинаковы.

Предпосылками к возникновению технического анализа были наблюдения изменений цен на финансовых рынках на протяжении веков. Самый старый инструмент из арсенала технического анализа — диаграммы «японские свечи», разработанные японскими торговцами рисом в 17-18 веках. Рассмотрим подробнее.

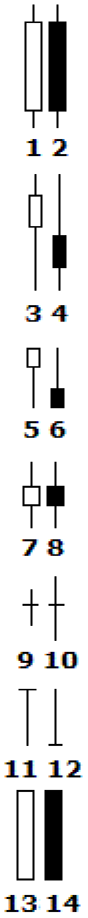
Японские свечи - вид интервального графика и технический индикатор, применяемый главным образом для отображения изменений биржевых котировок акций, цен на сырьё и т. д.

График вида «японские свечи» также называют совмещением интервального и линейного графика в том смысле, что каждый его элемент отображает диапазон изменения цены в течение определённого времени. Он чаще всего используется при техническом анализе рынка.

Считается, что впервые график такого вида придумал японский торговец рисом Мунэхиса Хомма (англ.) в XVII веке для наглядного изображения ценового максимума и минимума в течение определённого периода времени, а также цены на начало и конец данного периода (цена открытия и цена закрытия соответственно). «Японские свечи» пользуются большой популярностью благодаря простоте представления информации и лёгкости прочтения. Начиная с XVII века, многие пытались создать различные схемы и графики, которые помогли бы предсказать поведение рынка в будущем. Данный метод оказался наиболее интересным, поскольку в одном элементе он отображал сразу четыре показателя вместо одного. Японские торговцы рисом быстро обнаружили, что на основании графиков, построенных при помощи «свечей» Хоммы, можно с достаточной степенью вероятности предсказывать будущий спрос и поведение цены. На сегодня «японские свечи» — один из самых распространённых методов отображения рыночных данных среди трейдеров.

Форма «японских свечей». «Свеча» состоит из чёрного либо белого тела и верхней/нижней тени (иногда говорят фитиль, см. рис. 1.1, формы с 1 по 14).

Верхняя и нижняя граница тени «свечи» отображает максимум и минимум цены за соответствующий период. Границы тела отображают цену открытия и закрытия.



Если в целом цены выросли, то тело белое (не закрашенное, цвета фоно-оформления, или просто светлое, часто зелёное), нижняя граница тела отражает цену открытия, верхняя — цену закрытия. Если цены снизились, то тело чёрное (закрашенное, обратного цвета фоно-оформления, или просто тёмное, часто красное), верхняя граница тела отражает цену открытия, нижняя — цену закрытия.

При совпадении цен открытия/закрытия с максимумом/минимумом, соответствующей тени может не быть (формы 5, 6) или даже обеих теней сразу (формы 13, 14). При совпадении цен открытия и закрытия тела может не быть (формы 9-12) Свеча не содержит прямой информации о движении цен внутри соответствующего интервала времени. Нет указаний на то, максимум или минимум был достигнут первым, сколько раз происходили рост или снижение цен. Например, при наличии обеих теней (формы 1—4, 7—10) нельзя сказать, сперва цена повышалась или понижалась. Чтобы это выяснить, надо изучать графики меньшего временного интервала.

Рис. 1.1. Форма «японских свечей» (виды 1 – 14)

Форма «свечи» во многом обусловлена трендом, который принимает рынок:

- **«Бычий»** тренд – уверенный рост рынков по цене (большинство покупает).
- **«Медвежий»** тренд – уверенный спад рынков по цене (большинство продаёт).
- **Волатильный** рынок – выраженный тренд роста или спада отсутствует, при этом степень ценовых колебаний весьма высока. Настроения спекулянтов – разнонаправленные и хаотически меняющиеся.
- **Боковой тренд –** нет ни выраженного направления рынка, ни существенных ценовых колебаний. Большинство игроков покинуло рынок, на нём остались только организаторы торговли, в чьи обязанности входит поддерживать рынок, не допуская его сильных колебаний в течение торгового дня.

Существует множество различных видов свечей, на рис. 1.1 изображены самые простые из них. Ниже приведены названия и вероятные предположения для некоторых видов.

1. «Белая свеча» — сигнализирует о движении вверх (чем длиннее свеча, тем больше разница в цене).

2. «Чёрная свеча» — сигнализирует о движении вниз (чем длиннее свеча, тем больше разница в цене)

3. «Длинная нижняя тень» — сигнализирует о бычьем рынке (длина нижней тени должна быть не меньше тела, чем она длиннее, тем надёжнее сигнал)

4. «Длинная верхняя тень» — сигнализирует о медвежьем рынке (длина верхней тени должна быть не меньше тела, чем она длиннее, тем надёжнее сигнал)

5. «Молот» — важный сигнал разворота в основании. Обладает маленьким телом (белым или черным), расположенным в верхней части ценового диапазона сессии, и очень длинной нижней тенью; срезанная вершина — свеча, у которой отсутствует верхняя тень (бычий сигнал во время спада и медвежий во время подъёма); «повешенный» — важный сигнал разворота на вершине. Повешенный и молот — это, в сущности, одна и та же свеча. Она имеет маленькое тело (белое или черное),

расположенное в верхней части ценового диапазона сессии, и очень длинную нижнюю тень. Верхняя тень маленькая или вообще отсутствует. Но если эта свеча появляется при восходящей тенденции, она становится медвежьим повешенным. Она показывает, что рынок стал уязвим, но требует «медвежьего» подтверждения в течение следующей сессии (в виде черной свечи с более низкой ценой закрытия). Как правило, нижняя тень этой свечи должна вдвое-втрое превосходить высоту тела.

6. «Перевёрнутый молот» — сигнал разворота в основании, однако требует подтверждения в следующей сессии (тело может быть чёрное либо белое); «срезанное основание» — сигнал разворота в основании, однако требует подтверждения в следующей сессии (без нижней тени); «падающая звезда» — свеча с длинной верхней тенью, короткой нижней тенью (или без неё) и маленьким телом вблизи минимумов сессии, которая появляется после восходящей тенденции. Является медвежьим сигналом при восходящей тенденции

7. «Белый волчок» — нейтральная фигура, приобретает значение в комбинации с другими свечами.

8. «Чёрный волчок» — нейтральная фигура, приобретает значение в комбинации с другими свечами.

9. «Доджи» (додзи, дожи) — цены открытия и закрытия одинаковы (или почти одинаковы), приобретает значение в комбинации с другими свечами, однако при этом относится к числу наиболее важных свечей. Кроме того, они входят в состав важных моделей свечей.

10. «Длинноногий доджи» — сигнал разворота на вершине, когда два дня подряд открываются с сильной «брешью» («гэпом») вверх-вниз и свеча «повисает» над графиком. Если цены открытия и закрытия длинноногого доджи находятся в середине между максимумом и минимумом, то такая свеча называется «рикша».

11. «Доджи-стрекоза» — сигнал разворота (без верхней тени, длинная нижняя тень).

12. «Доджи-надгробие» — додзи, цены открытия и закрытия которого равны минимальной цене сессии. Сигнал разворота на вершине при восходящей тенденции. Также может быть сигналом разворота в основании при нисходящей тенденции, но только при наличии бычьего подтверждения в течение следующей сессии.

13. «Белый марубодзу» (в другом переводе марибозу) — быки доминируют с сохранением тенденции к повышению (без теней).

14. «Чёрный марубодзу» (в другом переводе марибозу) — медведи доминируют с сохранением тенденции к понижению (без теней).

Комбинации свечей. Несмотря на простоту приведённых видов, существуют также более сложные случаи. Некоторые из них рассмотрены на StockCharts.com (англ.). Так, следует отметить, что многолетние наблюдения за свечными графиками позволили японским трейдерам отмечать те или иные сигналы, состоящие из двух, трех и более свечей. Однако, как правило большинство сложных комбинаций содержит 2-3 свечи. Среди таких моделей можно отметить «завеса из темных облаков», «бычье поглощение», «разрывы тасуки», «три черные вороны», «ступенчатое дно», «брошенный младенец» и многие другие.

«Японские свечи» отражают не только цену, но и её волатильность — «разброс цен», когда заявки «купить/продать по рынку» идут в огромном количестве в обе стороны сразу. Причины, по которым цена была неустойчива, выяснятся позже, когда всё будет закончено. Поэтому участники торгов отслеживают дни, когда начинается неожиданно большой «разброс цен» по какой-либо ценной бумаге. Как правило, в этой точке объём торгов резко возрастает, а затем падает.

«Японские свечи», «повисающие» над графиком цены, соответствуют состоянию, когда спрос и предложение на рынке не позволяют установить окончательную цену. На бирже может быть четыре соотношения этих показателей при любом достигнутом значении цены и любом объёме торгов:

- Желающих купить больше, чем желающих продать — спрос превышает предложение — цена растёт.
- Желающих продать больше, чем желающих купить — предложение превышает спрос — цена падает.
- Желающих купить столько же, сколько желающих продать — спрос и предложение равны — цена не меняется, «боковой тренд».
- Состояние неуверенности — «поворотная точка», после которой владельцы ценных бумаг начинают «сбрасывать» их по любой цене.

Четвёртое состояние возникает тогда, когда те, кто мог бы продать акции, не желают их продавать, так как всё ещё уверены, что будет дальнейший рост, но те, кто мог бы купить акции, не желают их покупать, так как знают, что никакого роста не будет. Это состояние неустойчиво: любое внешнее событие может толкнуть цены в любом направлении. Как правило, в этой точке объём торгов уменьшается, а когда цена разворачивается, он снова растёт.

И наконец, вместе с постоянным большим объёмом торгов «свечи» могут подсказать и наиболее вероятное направление движения цены. Когда тело «свечи» белое, участники торгов не боясь покупают акции до конца биржевого дня. Вследствие этой уверенности котировки могут продолжать расти и на следующий день. Для чёрной «свечи» верно обратное.

Вернёмся к основным **подходам** к техническому анализу. Технический анализ не рассматривает причины того, почему цена изменяет своё направление (например, вследствие низкой доходности акций, колебаний цен на другие товары или изменения иных условий), но учитывает лишь тот факт, что цена уже движется в определённом направлении.

С точки зрения аналитика, доход может быть получен на любом рынке, если верно распознать тренд и открыть позицию в направлении тренда, а затем вовремя закрыть торговую позицию. Так, если цена упала до нижнего предела, надо пользоваться случаем и открывать позицию на покупку, а если цена выросла до верхнего предела и развернулась — открывать позицию на продажу. Возможен также учёт объёмов торгов.

Анализ рыночных тенденций на основе механизма «японских свечей» позволяет делать заключение об ожидаемых в краткосрочной перспективе рыночных тенденциях (**трендах**). При этом существенное внимание уделяется особым уровням: линии поддержки – уровню, ниже которого рынок потенциально не должен упасть, и линии сопротивления – уровню, выше которого рынку невозможно вырасти, с учётом того, что об этом рынке известно на настоящий момент.

Помимо трендов, в техническом анализе рассматриваются и анализируются так называемые **паттерны** — типовые рисунки, «фигуры», формирующиеся на графиках. Наиболее известными являются «Флаг», «Двойная вершина», «Тройная вершина». Разновидностью тройной вершины является фигура «Голова и плечи», у которой первая и третья вершины ниже второй. Достаточно большое разнообразие различных треугольников.

Выводы, полученные на основании технического анализа, могут расходиться с выводами, получаемыми от фундаментального анализа. В основном, фундаментальный анализ основывается на том, что реальная стоимость товара (ценной бумаги, валютной пары) отличается от рыночной цены — она переоценена или недооценена. Если можно рассчитать «верную» цену, то можно предполагать, что рынок «скорректируется» до нужного уровня (коррекция может происходить вверх или вниз). Поэтому рекомендации фундаментального анализа могут противоречить рекомендациям технического анализа.

Три аксиомы технического анализа:

- *Движения цен на рынке учитывают всю информацию.* Согласно этой аксиоме, вся информация, влияющая на цену товара, уже учтена в самой цене и объёме торгов, и нет необходимости отдельно изучать зависимость цены от политических, экономических и прочих факторов. Достаточно сосредоточиться на изучении динамики цены/объёма и получить информацию о наиболее вероятном развитии рынка.
- *Движение цен подчинено тенденциям.* Цены изменяются не просто случайным образом, а следуют при этом некоторым трендам (тенденциям), то есть временны́е ряды цен можно разбить на интервалы, в которых преобладают изменения цен в определенных направлениях.
- *История повторяется*. Имеет смысл применять графические модели (фигуры) изменения цен, разработанные на основе анализа исторических данных, поскольку изменения цен отражают довольно устойчивую психологию рыночной толпы — на схожие ситуации участники реагируют схожим образом.

Критика технического анализа. Несмотря на то, что многие технические аналитики верят, что их техника даёт им преимущество перед другими участниками торгов, далеко не все исследователи разделяют эту уверенность. Технический анализ графиков цен в прошлом не позволяет угадать «точки разворота» цен в будущем, а когда цены развиваются в уже известном направлении, теханализ даёт простейшую стратегию «покупать и держать».

Среди критиков теханализа достаточно много преуспевающих инвесторов. Например, Уоррен Баффет говорит следующее: «Я понял, что технический анализ не работает, когда перевернул графики цен «вверх ногами» и получил тот же самый результат». Питер Линч дал еще более резкую оценку: «Графики цен великолепны, чтобы предсказывать прошлое».

Новые волны критики технического анализа появились в связи с вовлечением в торговлю виртуальных машин (ботов), чья деятельность запрограммирована на отработку определённых решающих правил. В связи с тем, что время на принятие решений существенно сократилось (из-за машинной обработки сигналов), устойчивые паттерны, обусловленные человеческим характером принятия решения, пропадают (не распознаются, размываются). Рынок складывается всё более и более волатильно и хаотично.

Наиболее хорошо воспроизводимые результаты технический анализ показывает в пределах одной торговой сессии. За пределами этого интервала, результат анализа начинает искажаться вновь превносимыми обстоятельствами (существенными новостями, выходом новых статистических данных, парадигмальным изломом рыночной тенденции). Аналитические выводы, полученные на условно-стационарном участке рынка, теряют свою актуальность при переходе за точку разрыва тенденции (обесцениваются).

1.5. Принципы фундаментального анализа рынков

Фундаментальный анализ изначально ориентирован на инвестиционные решения, принимаемые «вдолгую» (по крайней мере, на полгода-год и дольше). Он основывается: применительно к рынку – на его макроэкономических характеристиках, применительно к отдельному эмитенту – на его финансово-хозяйственном состоянии. Финансовый анализ выводит перспективы роста акций из:

а) готовности эмитента увеличивать свою отдачу на капитал по чистой прибыли;

б) готовности рынков инвестировать в новые выпуски акций (наличие долговременно свободных денежных средств, готовых быть иммобилизованными в инвестиции со сравнительно высоким уровнем риска).

Инвестор может иметь на руках две оценки стоимости бизнеса: рыночную (ту, которую сегодня даёт рынок) и фундаментальную (выведенную из способности бизнеса генерировать прибыль). Об этом подробно см. раздел 7 части 1. Сравнивая две эти оценки, инвестор может сделать предварительный вывод о недооценённости или переоценённости актива. Чтобы сделать окончательный вывод, инвестору придётся дополнить финансовый анализ рыночным, оценить долгосрочные рыночные перспективы бизнеса, акции или облигации которого инвестор собрался покупать.

Характерный пример фундаментального анализа рынков – история с поведением индекса NASDAQ в 1997 – 2000 годах. В эти годы наблюдался бурный спекулятивный рост этого рынка, и многие аналитики утверждали, что этому росту не будет конца. Все эти оптимистические оценки сопровождались панегириками «новой экономике», эре доткомов. В то же время, осторожные экономисты предупреждали, что добром этот рост не кончится, что не за горами – обрушение цен. На что же они опирались в своих выводах? Прежде, всего на анализ фундаментального соотношения «стоимость бизнеса – годовая чистая прибыль», price-to-earnings ratio, PE. На сайте [26] представлены данные по PE для 500 крупнейших эмитентов мировой экономики (индекс S&P 500). Динамика PE за последние несколько десятков лет представлена на рис. 1.2.

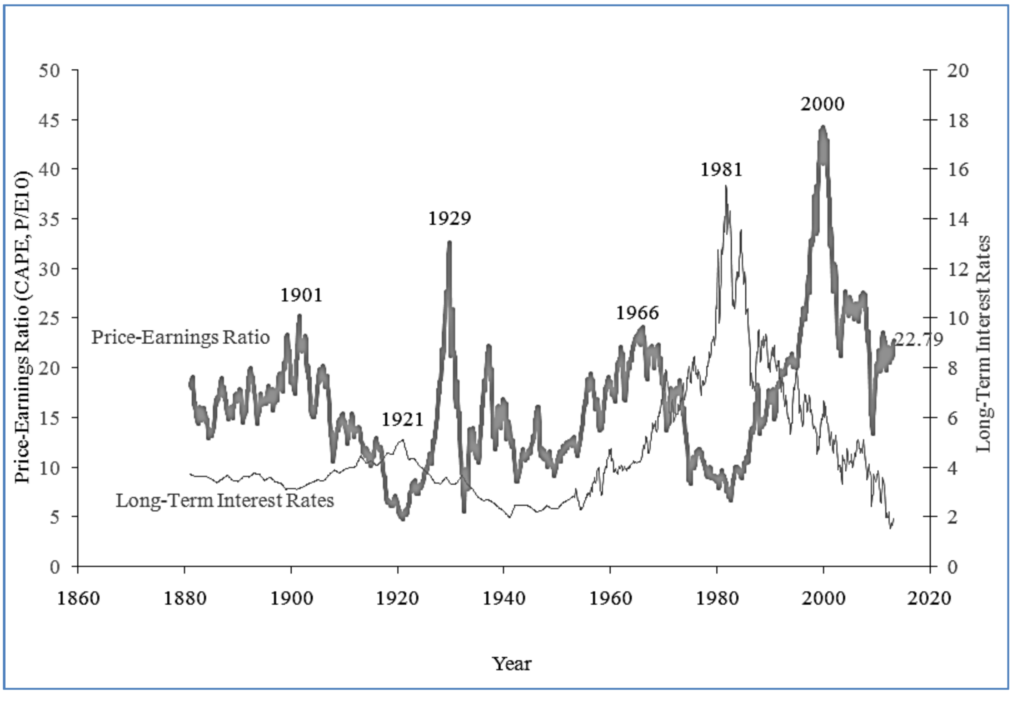


Рис. 1.2. Соотношение индекса PE процентных ставок по долгосрочным облигациям (по данным [26]).

Видно, что в 2000 году показатель по PE достиг абсолютного максимума и составил 45 лет окупаемости инвестиций в акции по уровню прибыли. Понятно, что долго эта эйфория продолжаться не могла. Средний уровень PE за 150 лет составляет 15. Соответственно, нынешний рынок акций США можно считать переоценённым примерно на четверть. И эта переоценённость сохранится до тех пор, пока не начнёт расти доходность по облигациям. В этом отношении, показателен 1981 год, когда ставка доходности по облигациям США достигла абсолютного максимума в 16% годовых. В эти горы наблюдался массовый исход инвесторов из акций в облигации, что не замедлило сказаться на инвестиционной привлекательности акций (уровень PE упал до минимума в 7 лет; сегодня это примерно соответствует PE для British Petroleum – компании, которая только что пережила мировую глобальную катастрофу, разлив нефти в Мексиканском заливе в 2010 году).

Фундаментальный анализ не даёт ответа на вопрос, когда именно произойдёт тот или иной рост или спад на рынке. Он делает заявление о неуклонно нарастающих шансах на проявление той или иной тенденции, и обосновывает свой вывод не накопленными данными по цене или объёму торгов, а статистикой по фундаментальным индикаторам и соображениями здравого смысла и житейской логики, основанной на хорошем знании законов природы.

Особое внимание современный фундаментальный анализ уделяет **точкам разрыва** в тенденции, точкам излома тренда, смены парадигмы. Вся история по финансово-рыночным индексам, которая была накоплена до моментов разлома, стремительно обесценивается, теряет свою полезность для прогнозирования состояния рынков в будущем. И для фундаментального анализа рынков критически важно научиться распознавать такие точки на оси времени. Сегодня, с позиций уже изученной истории, эти точки видны хорошо. Это 1929 год (крах бирж и Великая депрессия), это 1981 год (разнузданная инфляция), и это 2000 год (крах NASDAQ и обвал всех прочих рынков акций). Рынки ждут нового перелома, обусловлено макроэкономическими тенденциями «длинных циклов».

Что касается фундаментального анализа эмитентов (скоринг), то здесь основное внимание уделяется факторам напрямую завязанным на генерацию растущих уровней прибыли. В этом отношении, идеальным примером является формула Дюпона, связывающая отдачу на собственный капитал (ROE) с уровнями внутренних факторов рентабельности, оборачиваемости и финансового рычага (см. раздел 7, 1-ой части учебного пособия «Финансовая математика»). Чем выше ROE и чем устойчивее этот фактор растёт, тем увереннее рыночное признание эмитента, тем быстрее и надёжнее растут его акции.

Большее внимание фундаментальному анализу уделяется в разделе 5, 2-ой части настоящего пособия, при рассмотрении разбирая вопросов прогнозирования индексов финансовых рынков.

Выводы по разделу 1

В разделе 1 пособия проводится сопоставительный анализ двух подходов к исследованию рынков: фундаментального и технического. В дальнейшем изложения части 2 пособия основной акцент делается на фундаментальном подходе к анализу. Это никоим образом не умаляет достоинств технического анализа, особенно в свете новейших опубликованных исследований в рамках работ нашей научной школы. Тем не менее, фундаментальный подход обладает одним неоспоримым преимуществом для анализа – обстоятельной информационной статистической базой финансового анализа, собранной за длительный период по большому количеству публичных компаний. В России мало публичных компаний, в сравнении с условиями США (порядка 10 тыс. биржевых наименований), да и срок жизни российского рынка (25 лет) – невелик, с планетарной точки зрения. Тем не менее, работа по накоплению фундаментальных данных ведётся, и эти данные подлежат количественному анализу, что и доказывает 10-летний авторский опыт исследований в этом направлении.

Вопросы для самопроверки

1. Какие сегменты финансовых рынков Вы знаете?
2. Перечислите основные три группы финансовых инструментов.
3. Чем отличается технический анализ рынков от фундаментального?
4. Каковы основные аксиомы технического анализа?
5. Что такое «японские свечи»?
6. Почему фактор PE является определяющим для оценки недооценённости или переоценённости рынков?
7. Запишите формулу Дюпона, перечитав раздел 7 первой части пособия.

РАЗДЕЛ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ

2.1. Доходность и риск фондового портфеля (вероятностная парадигма)

Портфель – это организованная совокупность N ценных бумаг (или, без нарушения общности, пакетов ценных бумаг), каждая из которых характеризуется своей первоначальной ценой вхождения в портфель S_{i0}. Итого первоначальная стоимость портфеля, сформированного в момент времени T=0:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} S_{i0}. \qquad (2.1)$$

Можно сказать, что в начальный момент времени формирования портфеля, складывается долевое распределение **весов** активов в портфеле

$$x_i = \frac{S_{i0}}{S_0}, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad i = 1,...,N; \qquad (2.2)$$

Сформированный портфель немедленно начинает изменять свои ценовые характеристики во времени. Часть активов портфеля растёт, часть – падает. Соответственно, в момент T каждый компонент имеет цену S_{iT}, а весь портфель – цену S_T.

Курсовая доходность i-го актива портфеля (процентов годовых), измеренная в момент времени T, может быть оценена по формуле:

$$r_i (T) = (S_{iT} - S_{i0}) / S_{i0} / T. \qquad (2.3)$$

Аналогично для портфеля в целом, его курсовая доходность, как случайная величина, линейно зависит от доходности отдельных активов в составе портфеля (также случайных величин).

$$r (T) = (S_T - S_0) / S_0 / T = \sum_{i=1}^{N}(S_{iT} - S_{i0}) / S_0 / T =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(S_{iT} - S_{i0}) / S_{i0} * S_{i0} / S_0 / T = \sum_{i=1}^{N} x_i * r_i \ (T) \qquad (2.4)$$

То есть, мы при анализе портфеля здесь и далее уходим от использования его ценовых характеристик, оперируя с доходностями компонент портфеля.

Если мы говорим о доходностях как о случайных величинах, вероятностное распределение которых можно получить, то уместно моделировать портфель в вероятностной парадигме. Наиболее ходовым вариантом вероятностного моделирования является представление портфеля N-мерной случайной величиной доходности:

$$r = (r_1, r_2, ..., r_N) , \tag{2.5}$$

причём характеристики случайной величины доходности являются константами, не зависящими от времени наблюдения (т.е. не являются функциями времени), причём каждая из компонент портфеля имеет нормальное вероятностное распределение. Подробнее о вероятностных распределениях см. раздел 1 учебного пособия «Финансовая математика», а также любой курс теории вероятностей.

Нормальное распределение случайной величины доходности характеризуется двумя параметрами – математическим ожиданием r_i (будем обозначать его той же буквой, что и саму случайную величину) и среднеквадратическим отклонением σ_i

Между отдельными случайными величинами доходности в составе единой N-мерной величины R существует стохастическая связь, которая характеризуется **корреляционной матрицей** $\{\rho_{ij}\}$, коэффициенты которой характеризуют связь между доходностями i-ой и j-ой бумаг. Если $\rho_{ij} = -1$, то это означает полную отрицательную корреляцию, если $\rho_{ij} = 1$ - имеет место полно положительная корреляция. Всегда выполняется $\rho_{ii} = 1$, так как ценная бумага полно положительно коррелирует сама с собой.

Поскольку все компоненты портфеля распределены нормально, то и результирующая доходность по портфелю распределена нормально (это следует из свойств нормального распределения). Тогда математическое ожидание распределения курсовой доходности по портфелю:

$$r = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_i , \tag{2.6}$$

среднеквадратическое отклонение (СКО) доходности портфеля от среднего (σ):

$$\sigma = (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Пример 2.1. Портфель составлен из двух акций, параметры которых приведены в таблице 2.1.

Табл. 2.1. Параметры акций в портфеле

№ пп	x	r, % год	σ, % год
1	0.3	10	3
2	0.7	20	5

Акции некоррелированы ($\rho_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Определить доходность и волатильность портфеля.

Решение. В соответствии с (2.6) – (2.7)

$r = x_1 * r_1 + x_2 * r_2 = 0.3 * 10 + 0.7 * 20 = 17\%$ годовых

$\sigma^2 = x_1^2 * \sigma_1^2 + x_2^2 * \sigma_2^2 = 0.09 * 9 + 0.49 * 25 = 13.06$ (% год)^2

$\sigma = \sqrt{13.06} = 3.6$ % годовых

В разделе 1 части 1 настоящего пособия мы рассмотрели понятие риска, и то, чем риск отличается от волатильности. Чтобы оценить риск портфеля, необходимо установить норматив L на предельно низкий размер доходности по портфелю, % годовых. Если доходность оказывается ниже нормативного значения, фиксируется негатив. Вероятность наступления негативного события критического снижения доходности – это и есть **риск**, оцениваемый формулой

$$\mathrm{Risk} = \Pr\{r < L\} = \int_{-\infty}^{L} f(r)dr = F(L), \tag{2.8}$$

где F(*) – функция распределения случайной величины доходности актива (или портфеля), f(*) – плотность распределения (производная от F).

Для анализа нормального распределения в Excel существует стандартная функция **НОРМРАСП** {x; r; σ; ПРИЗНАК}, где ПРИЗНАК – это условие того, что вычисляется. Если ПРИЗНАК = ИСТИНА, то вычисляется функция распределения F(x). Если ПРИЗНАК = ЛОЖЬ, вычисляется плотность нормального распределения f(x).

Пример 2.2. Портфель бескупонных облигаций обладает среднеожидаемой доходностью r = 10% годовых и СКО σ = 3% годовых. Установлен норматив предельной доходности L = 6% годовых. Определить риск портфеля.

Решение. Настройка формулы (2.8) с помощью стандартной функции НОРМРАСП {*} даёт F(6% год.) = 0.09.

Мы получили значение риска, но мы не можем интерпретировать его в качественных терминах, оценить насколько велико или мало полученное значение. Чтобы перейти от количественной оценке риска к качественной, необходимо перейти от вероятностной функции распределения вида F(*) к стандартному виду функции нормального распределения Ф(*) с матожиданием 0 и дисперсией 1.

Для функции Ф(*) известно:

$$\Phi(-\infty) = 0,\ \Phi(0) = 0.5,\ \Phi(\infty) = 1,$$

$$f(-\infty) = 0,\ f(0) \approx 0.4,\ f(\infty) = 0. \qquad (2.9)$$

Тогда выполняется условие учёта сдвига и масштаба в стандартном нормальном распределении:

$$F\,(L) = \Phi\,\left(\frac{L-r}{\sigma}\right), \qquad (2.10)$$

Исследуя вид функции Ф(*) и темпы её роста с ростом L, можно предложить следующие правила «жёсткого» нормирования фактора риска:

Если $(L\text{-}r) / \sigma < -1.25$, (2.11)

тогда Risk < 0.106 является **приемлемым** значением и во всех случаях может быть принят (неснижаемый уровень).

Если $-\,1.25 < (L\text{-}r) / \sigma < -0.85$, (2.12)

тогда 0.106 < Risk < 0.198, и этот уровень является **пограничным.** Такой риск может быть принят только с оговорками, с применением специальных мер по снижению уровня риска. К таким мерам, в частности, может быть отнесено внедрение в портфель хеджирующих (страхующих) фондовых опционов (по этому поводу см. раздел 4 настоящего пособия).

Риск, превышающий уровень 0.2, соответствующий условию:

$$L > r - 0.85*\sigma, \qquad (2.13)$$

является **неприемлемым** для рационального инвестора. О типах инвесторов см. параграф 3.6.

Если вернуться к результату примера 2.2, то полученный риск является полностью приемлемым.

При этом $(L-r) / \sigma = (6-10)/3 = -1.333 < -1.25$. Сформулированные условия (2.11) – (2.13) позволяют оценивать качественные уровни рисков без применения вероятностных расчётов.

2.2. Доходность и риск фондового портфеля (нечётко-множественная парадигма)

Иногда случайная величина доходности финансового актива не может получить своё вероятностное распределение, которое могло бы быть надёжно подтверждено статистическими испытаниями. Тому есть две основных причины:

- накопленная по акции статистика не удовлетворяет условиям статистической однородности. Например, совместно рассматривать динамику акций высокотехнологичного сектора США до 2000 года и после него – некорректно в принципе. Сначала у нас был бурный рост, затем бурный спад; «средняя температура по больнице» (среднеожидаемая доходность акций) близка к нулю;
- полученное по итогам моделирования вероятностное распределение не обладает нормальной формой (искривлено, содержит усечения или «толстые хвосты»). Если мы не можем привести накопленную статистику к виду нормального распределения, тогда вероятностное моделирование портфеля на этих данных становится бесперспективным. Мы оказываемся не в состоянии получить аналитический вид для вероятностного распределения доходности по портфелю в целом.

Если соблюдаются вышеперечисленные условия, то от вероятностной парадигмы при моделировании портфеля надо отказываться и переходить к нечётко-множественным описаниям. Когда появились первые нечёткие модели для фондовых портфелей, встал закономерный вопрос, что делать с зависимостью акций друг от друга в составе портфеля (с корреляционной матрицей). Дополнительные исследования (в т.ч. [22]) показали, что неопределённость в части корреляционной матрицы значительно слабее сказывается на результате моделирования портфеля, чем неопределённость, связанная с разбросом по доходности и волатильности активов. Поэтому было признано, что фактор корреляции может быть беспроблемно вынесен из модели, и сосредоточиться необходимо на моделировании доходности отдельных активов как нечётких чисел произвольного вида. Подробнее о принципах нечётко-множественного моделирования см. раздел 1 первой части настоящего учебного пособия.

Рассмотрим случай, когда доходность i-го актива портфеля моделируется как треугольное нечёткое число (см. рис. 2.1):

$$r_i = (r_{imin}, r_{iav}, r_{imax}), \qquad (2.14)$$

где r_{imin} – минимально-возможное значение доходности, r_{iav} – среднеожидаемое значение доходности, r_{imax} – максимально-возможное значение доходности. При этом мы заранее оговариваем, что треугольная форма числа не обязательно должна быть симметричной.

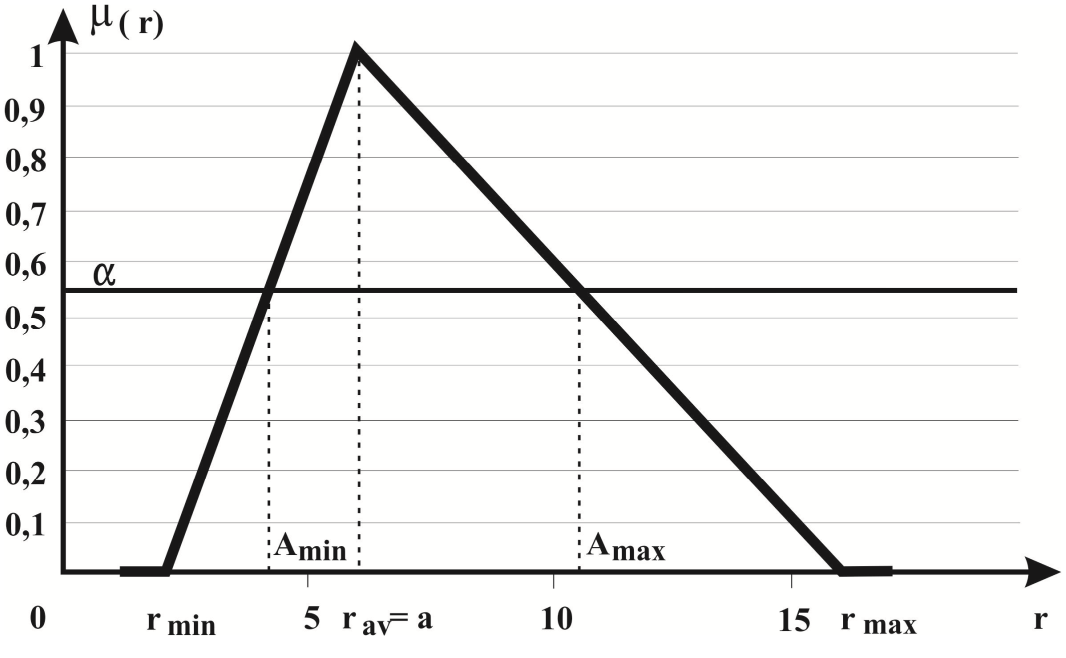


Рис. 2.1. Треугольное число

Аналогом волатильности в вероятностном смысле может быть мера **разброса доходности** по i-му активу (**Vlt$_i$**). Зафиксируем уровень функции принадлежности нечёткого числа α = 0.5. Этому уровню α отвечает сегмент принадлежности – интервал [r_{1i} , r_{2i}]. Тогда разброс доходности

$$\mathrm{Vlt}_i = r_{2i} - r_{1i} . \qquad (2.15)$$

Перейдём теперь к оценке портфеля. Свойство аддитивности треугольных нечётких чисел говорит о том, что если доходности активов – такие числа, то и доходность по портфелю является треугольным числом, вследствие выполнения условия (2.4) Тогда можно искать доходность портфеля как треугольное число вида

$$r = (\min, \mathrm{av}, \max), \qquad (2.16)$$

где

$$\min = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathrm{r}_{\mathrm{imin}} ,$$

$$\mathrm{av} = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathrm{r}_{\mathrm{iav}} ,$$

$$\max = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathrm{r}_{\mathrm{imax}} . \qquad \text{(набор 2.17)}$$

В свою очередь, разброс доходности по портфелю в целом (VLT) определяется по формуле, с помощью (2.15):

$$\mathrm{VLT} = \sum_{i=1}^{N} x_i * Vlt_{\mathrm{i}} . \qquad (2.18)$$

Пример 2.3. Портфель состоит из N=4 активов, параметры веса в портфеле, доходности и разброса представлены в таблице 2.2. Найти доходность и разброс по портфелю.

Табл. 2.2. Параметры доходности по 4 активам (треугольные числа)

N пп	x	Доходность, % годовых			Vlt, % г.
		min	av	max	
1	0.1	10	20	30	10
2	0.3	20	40	60	20
3	0.4	30	60	90	30
4	0.2	40	80	120	40

Решение. В соответствии с (2.17) и (2.18),

min = 0.1*10 + 0.3*20 + 0.4*30 + 0.2*40 = 27% годовых,

av = 0.1*20 + 0.3*40 + 0.4*60 + 0.2*80 = 54% годовых,

max = 0.1*30 + 0.3*60 + 0.4*90 + 0.2*120 = 81% годовых,

max = 0.1*10 + 0.3*20 + 0.4*30 + 0.2*40 = 27% годовых.

Поскольку параметры доходности портфеля определены, можно приступить к оценке его риска. По аналогии с вероятностным случаем, зафиксируем норматив доходности L и определим риск портфеля как

$$\mathrm{Risk} = \mathrm{Poss}\ \{r < L\}. \qquad (2.19)$$

Примем, без нарушения общности, что min < L < av (в противном случае, риски инвестиций становятся запредельными и не отвечают критерию рациональности). Тогда выполняется условие, справедливое только для чисел треугольного вида [3]:

$$\mathrm{Risk} = \begin{cases} 0, \quad \min > 0 \\ R \times (1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \times \ln(1 - \alpha_1)), \quad \min \le 0 < av \\ 1 - (1 - R) \times (1 + \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \times \ln(1 - \alpha_1)), \quad av \le 0 < \max \\ 1, \quad \max \le 0 \end{cases}, \qquad (2.20)$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{L - \min}{\max - \min}, \ \max > 0 \\ 1, \ \max \le 0 \end{cases}, \qquad (2.21)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, \ \min > 0 \\ \frac{L - \min}{av - \min}, \ \min \le 0 < av \\ 1, \ \ av = 0 \\ \frac{\max - L}{\max - av}, \ \ av < 0 < \max \\ 0, \ \max \le 0 \end{cases}. \qquad (2.22)$$

Если треугольное число r симметрично, то соотношения (2.20) – (2.22) упрощаются. При $L < av$ выполняется:

$$Risk = \lambda + (1 - 2\lambda) * \ln(1 - 2\lambda)/2, \tag{2.23}$$

где $\lambda = (L\text{-}min)/(max - min)$. При $\lambda=0$ $Risk = 0$, а при $\lambda=0.5$ $L=av$ и $Risk = 0.5$ (50%).

Пример 2.4. Для портфеля известна треугольно-симметричная оценка доходности: min = 20, av = 40, max = 60, L = 30. Определить риск.

Решение. В соответствии с (2.23),

$$\lambda = (30\text{-}20) / (60 - 20) = 0.25,\ 1 - 2\lambda = 0.5,$$

$$Risk = 0.25 + 0.5 * \ln 0.5 / 2 = 0.077\ (8\%).$$

Уровень риска как возможности также подлежит лингвистическому распознаванию. Можно построить **нечётко-множественную риск-функцию** Risk = Risk (λ), на основе исследования которой осуществить лингвистическую классификацию уровня риска. Простейший подход к распознаванию уровней даёт:

- если риск меньше 10%, то он считается *приемлемым* (на уровне погрешности, неснижаемым). Это как раз результат примера 2.4;
- если риск составляет от 10% до 20%, то он является *пограничным.* Необходимо провести специальные дополнительные исследования, снять часть информационной неопределённости, чтобы довести уровень риска до приемлемого уровня;
- если риск больше 20%, то он неприемлем. (правило 2.24)

Для оценки рисков по виду нечёткого числа, можно воспользоваться риск-калькулятором IRC (Investment Risk Calculator, разработчики А. Недосекин и Д. Бессонов). Дистрибутив калькулятора расположен в открытом доступе по ссылке [24].

Наряду с треугольными, для моделирования портфеля можно использовать любые другие нечёткие числа. Самым грубым вариантом моделирования является интервальная оценка доходности активов.

Пример 2.5. Пусть доходность портфеля r – прямоугольное нечёткое число – интервал r = [min, max] (вырожденный случай).

Норматив неприемлемой доходности составляет $L \in [\min, \max]$. Каков риск инвестора?

Решение. Выполняется формула:

$$Risk = Poss\ \{r < L\} = (L - \min) / (\max - \min). \qquad (2.25)$$

В этом случае, риск растёт линейно от 0 до 1, по мере роста норматива L от min до max. Например, если min = 20, max = 70, L = 30, то Risk = (30-20)/(70 – 20) = 0.2. Видно, что даже сравнительно небольшое отстояние L от минимального уровня может вызвать неприемлемый инвестиционный риск. Поэтому при моделировании нужно прибегать к интервальным оценкам только в самых крайних случаях.

2.3. Теория оптимального выбора по Парето

Зафиксируем два критерия, которые будут однозначно характеризовать портфель: **среднеожидаемая доходность и риск неэффективных инвестиций.** И теперь приступим к варьированию весов компонент портфеля в самых широких пределах, оценивая доходность и риск портфеля для каждой вариации, по только что предложенным формулам. При этом для нас неважно, какую именно модельную парадигму мы выбираем для моделирования: вероятностную или нечётко-множественную.

Если варьирование будет осуществляться в дискретном поле значений весов, то мы получим конечное множество портфелей. Если варьирование весами будет в непрерывном поле, то и результирующее множество портфелей будет непрерывным (несчётным), образуется так называемое **портфельное облако.**

Варьирование весами демонстрирует нам, что портфель меняет свои уровни доходности и риска в широких пределах. Рассмотрим два произвольных портфеля - A (r_A, $Risk_A$) и B (r_B, $Risk_B$) - и сопоставим их. Считается, что портфель A **доминирует** портфель B, если одновременно выполняются два условия:

$$r_A > r_B,\ Risk_A \leq Risk_B, \qquad (2.26)$$

т.е. доминирование одного портфеля над другим осуществляется одновременно по двум критериям: доходность больше, а риск меньше.

Если условия (2.26) не выполняются одновременно, то говорится, что портфельные альтернативы А и В являются **недоминируемыми**. Т.е. нельзя сказать, какое из портфельных решений лучше, всё зависит от предпочтений инвестора. Консервативный инвестор предпочтёт портфель с меньшим риском, а агрессивный – с большей доходностью.

Таким образом, оптимизация портфельного множества по Парето предполагает, что существует алгоритм выделения из совокупного множества портфелей (дискретного или непрерывного) **подмножества недоминированных альтернатив.** В дискретном случае это будет конечный набор портфелей, в непрерывном случае – огибающая линия портфельного облака (**эффективная граница**). Именно это подмножество и будет являться результатом оптимизации по Парето. Все портфели, не попадающие в оптимальное множество, являются доминированными (неоптимальными, неэффективными).

В. Парето сформулировал свою теорию оптимизации в работах, посвящённых теории экономического благосостояния. Он выделял состояния эффективного равновесия, при которых невозможно было бы улучшить одни показатели системы, не ухудшив состояния других показателей. В нашем случае, если мы оперируем на множестве **Парето-оптимальных** решений, то любые наши усилия в части роста доходности портфелей автоматически приведут к росту их рисков, потому что все Парето-оптимальные решения недоминируемы по построению.

Если случай дискретный, то построение оптимального множества по Парето достигается путём попарного перебора всех портфелей исходного множества. Если таких портфелей М, то нужно совершить М*(М-1)/2 переборов (число сочетаний из М по 2). Если же множество портфелей непрерывное, то восстановить его эффективную границу можно только приближёнными методами. Некоторые из таких методов мы рассмотрим далее по ходу изложения материалов настоящего пособия.

После того, как оптимальное подмножество по Парето сформировано, необходимо произвести сечение этого подмножества на три сегмента:

- сегмент консервативных инвестиций – оптимальные портфели с минимальными уровнями рисков;

- сегмент агрессивных инвестиций – оптимальные портфели с максимальными уровнями доходности;
- всё, что не попало в перечисленные выше два сегмента, наполняет сегмент промежуточных инвестиций.

Кластеризация оптимального подмножества на сегменты может производиться методами теории нечётких множеств (здесь соответствующие алгоритмы не рассматриваются).

2.4. Оптимизация фондового портфеля по Марковицу

Г. Марковиц получил Нобелевскую премию в 1990 году за действительно выдающийся результат. Он впервые в экономической науке предложил схему оптимизации непрерывного множества фондовых портфелей по Парето в рамках вероятностной парадигмы.

Пусть есть портфель из N активов, который моделируется на основе соотношений параграфа 2.1. При этом каждый портфель в модели Марковица характеризуется двумя компонентами: среднеожидаемой доходностью r (матожидание распределения) и волатильностью (СКО) распределения. Здесь есть тонкий момент: Марковиц признаёт волатильность портфеля в качестве измерителя его риска. Это проблемный момент теории, о чём будет говориться дальше. Пространство весов является непрерывным; поэтому совокупное множество всех возможных портфелей является непрерывным и несчётным.

Итак, в п. 2.1 (стр. 130-131) приводятся формулы:

$$r = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_i \ , \qquad (2.6)$$

$$\sigma = (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j)^{\frac{1}{2}} . \qquad (2.7)$$

Задача оптимизации по Парето предполагает, что её решение может осуществляться по одному из двух путей:

а) отбор портфелей с максимальной доходностью;

б) отбор портфелей с минимальным риском. Одновременно идти этими двумя путями невозможно; один из критериев должен выступить в качестве целевой функции оптимизации, а другой – ограничением.

Таким образом, **прямая оптимизационная задача** по Марковицу имеет следующую формулировку: определить вектор $\{x_i\}$, максимизирующий целевую функцию r вида (2.6) при заданном ограничении на уровень риска σ, оцениваемый (2.7):

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid r \to \max, \sigma = \text{const}. \qquad (2.27)$$

Задача (2.27) решается при двух дополнительных наборах ограничений:

нормирующее весовое ограничение вида (п.2.1, стр. 129):

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \qquad i = 1,\ldots,N; \qquad (2.4)$$

дополнительные ограничения на размер весов в портфеле:

$$0 \le x_{imin} \le x_i \le x_{imax} \le 1,\ i = 1\ldots N. \qquad (2.28)$$

Ограничения (2.28) формируют так называемый **профиль инвестирования.** Например, если структурируется портфель консервативных инвестиций, то активы, проявляющие себя агрессивно (высокая доходность при высоком риске) ограничиваются с точки зрения их присутствия в оптимальном портфеле.

Двойственная задача оптимизации – такая, когда волатильность выступает в качестве целевой функции, а доходность – в качестве ограничения. Формулируется она так: определить вектор $\{x_i\}$, минимизирующий целевую функцию σ вида (2.7) при заданном ограничении на уровень доходности r, оцениваемый (2.6):

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid \sigma \to \min,\ r = \text{const}. \qquad (2.29)$$

В ходе решения задачи оптимизации вида (2.29) также учитываются весовые ограничения (2.4) и (2.28).

В общей теории управления формально доказывается, что прямая и двойственная задачи оптимизации по Марковицу имеют одно и то же решение. Поскольку совокупное множество портфелей – это непрерывное портфельное облако (плоская фигура в координатах «доходность –

волатильность»), то решение задач (2.27) и (2.29) – это эффективная граница – кривая линия с изломами (в общем случае), огибающая портфельное облако сверху и слева (рис. 2.2).

Рис. 2.2. Эффективная граница непрерывного портфельного множества

На рис. 2.2 видно, что портфельная точка 3 доминируется точкой 2 по доходности, а точкой 1 – по волатильности, причём точки 1 и 2 лежат на эффективной границе.

Теперь исследуем варианты решения оптимизационной задачи Марковица. Это задача математического программирования, где целевая функция и весовые ограничения имеют линейный вид, а ограничение на волатильность – нелинейное (квардратическое относительно входящих в ограничение весов). Существуют специализированные методы построения множества оптимальных портфелей, среди которых симплекс-метод и метод угловых портфелей. В настоящем пособии описывается метод, который также успешно решает оптимизационную задачу, но, по сравнению с названными методами, делает её более простыми средствами. Этот метод называется **градиентным,** или методом градиентного спуска. Сначала рассмотрим этот метод в условиях отсутствия весовых ограничений вида (2.28). Суть его в следующем:

- В качестве нулевой итерации зафиксируем портфель, в котором 100% принадлежит проекту с максимальным уровнем доходности (правая точка эффективной границы портфеля).
- Затем выделим некоторую долю-дискрет Δx_i, например 10% суммарной весовой меры портфеля. Попробуем перенаправить эту дискретную инвестицию из крайнего портфеля правой точки в сторону одного из активов. В результате такого **ребалансинга**

возникает новый портфель с новыми характеристиками r и σ. Планово, при сканировании эффективной границы справа налево, наблюдается одновременное снижение r на величину $\Delta r > 0$ и волатильности σ на величину $\Delta\sigma > 0$.

- Обозначим:

  $$Grad = \Delta r / \Delta\sigma \text{ -} \qquad (2.30)$$

  градиент снижения доходности портфеля по уровню волатильности. Тогда, чтобы решить задачу оптимизации на очередном шаге итерации, необходимо потребовать, чтобы в ходе ребалансинга портфеля одновременно выполнялось два условия:

  $$Grad = \min, Grad > 0. \qquad (2.31)$$

  Это соответствует формированию эффективной границы как набору недоминируемых альтернатив по Парето. Если правило минимального градиента не выполняется, то такое доминирование при ребалансинге оказывается возможным: возникает проигрыш по волатильности при сопоставимой доходности или проигрыш по доходности при сопоставимой волатильности.

- В ходе сканирования эффективной границы мы рассматриваем все возможные варианты перенаправления дискрета Δx_i, от актива с номером i к активу с номером j.
- Проходим эффективную границу справа налево, итерацию за итерацией, до тех пор, пока все возможные градиенты не становятся отрицательными. Это означает, что огибающая портфельного облака делает разворот, пройдя левую точку границы. Все остальные портфельные точки, находящиеся на огибающей портфельного облака, уже неоптимальны (доминируются точками эффективной границы). Здесь градиентный алгоритм останавливается.

Таким образом, задача оптимизации портфеля по Марковицу без учёта весовых ограничений решена. Рассмотрим пример.

Пример 2.6. Портфель из N=4 активов представлен в таблице 2.3. Корреляционная матрица активов портфеля содержится в табл. 2.4.

Провести оптимизацию портфеля по Марковицу.

Таблица 2.3. Параметры портфеля

N пп	r, % год	σ, % год
1	10	3
2	20	5
3	40	6
4	50	7

Таблица 2.4. Корреляционная матрица

ρ	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1		0.8	
2		1		0.2
3	0.8		1	
4		0.2		1

Решение. Чтобы стартовать градиентный алгоритм, необходимо сначала установить координаты правой точки эффективной границы (σ. r). Это – точка с координатами (7, 50), соответствующая 100% заполнению портфеля активом с номером 4. Теперь зафиксируем Δx и проведём первую итерацию (см. табл. 2.5).

Табл. 2.5. Траектория градиентного алгоритма оптимизации (первые 7 шагов)

Итерация	i	j	Веса активов				R	SIGMA	Градиент
			1	2	3	4			
0			0	0	0	1	50	7	
1	4	1	0.1	0	0	0.9	46	6.3	5.71
	4	2	0	0.1	0	0.9	47	6.42	5.17
	4	3	0	0	0.1	0.9	49	6.33	1.49
2	4	1	0.1	0	0.1	0.8	45	5.67	6.06
	4	2	0	0.1	0.1	0.8	46	5.75	5.17
	4	3	0	0	0.2	0.8	48	5.73	1.67
3	4	1	0.1	0	0.2	0.7	44	5.11	6.45
	4	2	0	0.1	0.2	0.7	45	5.17	5.36
	4	3	0	0	0.3	0.7	47	5.22	1.96
4	4	1	0.1	0	0.3	0.6	43	4.67	7.27
	4	2	0	0.1	0.3	0.6	44	4.69	5.66
	4	3	0	0	0.4	0.6	46	4.84	2.63
5	4	1	0.1	0	0.4	0.5	42	4.39	8.89
	4	2	0	0.1	0.4	0.5	43	4.35	6.12
	4	3	0	0	0.5	0.5	45	4.61	4.35
6	4	1	0.1	0	0.5	0.4	41	4.29	12.50
	4	2	0	0.1	0.5	0.4	42	4.2	7.32
	4	3	0	0	0.6	0.4	44	4.56	20.0
7	4	1	0.1	0.1	0.5	0.3	38	3.95	16.0
	4	2	0	0.2	0.5	0.3	39	3.91	10.34
	3	1	0.1	0.1	0.4	0.4	39	3.96	12.50
	3	2	0	0.2	0.4	0.4	40	3.96	8.33

Видно, что оптимальным является перенаправление дискрета от актива с номером 4 в пользу актива с номером 3. В этом случае градиент оказывается минимальным и положительным. Зафиксировав оптимальное весовое распределение, переходим к шагу 2, и так до условия остановки алгоритма. Всего в данном примере, чтобы восстановить эффективную границу, требуется выполнить 17 шагов итерации, до выполнения условия отрицательности всех градиентов. Цветом в таблице подкрашены точки, лежащие на эффективной границе. Одновременно замечаем, что идёт неуклонный рост минимального градиента. Это обусловлено тем, что возрастает кривизна линии границы, по мере её сканирования справа налево.

Теперь вернёмся к вопросу о соблюдении в алгоритме весовых ограничений вида (2.28). Это делается на всех шагах алгоритма, начиная с нулевого. Если уже на нулевом шаге не удаётся залить портфель правой точки эффективной границы каким-либо одним активом, то идёт заполнение этого портфеля последовательно всеми активами, расположенными по убыванию максимума доходности, вплоть до заполнения. Затем, пошагово проходя градиентный алгоритм, в ходе каждого очередного ребалансинга мы проверяем его соответствие ограничениям (2.28). Если ограничения не выполняются, то соответствующий вариант ребалансинга отбрасывается.

2.5. Понятие монотонного портфеля

Рассмотрим портфель, в котором одновременно выполняются два условия предпочтения по доходности и волатильности:

$$r_1 > r_2 > \ldots . > r_N ,$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots . > \sigma_N . \qquad (2.32)$$

Видно, что все компоненты портфеля – это недоминируемые по Парето альтернативы. Соответственно, они все участвуют в формировании эффективной границы портфельного множества, в той или иной пропорции.

Все глобальные финансовые рынки представляют собой не что иное, как монотонные портфели, потому что они подчиняются **золотому правилу инвестирования**, которое гласит: **любой дополнительный риск заслуживает дополнительной премии за риск,** иначе нет резона этот риск принимать. Поэтому любая из глобальных финансовых альтернатив (вхождение на любой финансовый рынок или на отдельный его сегмент) оправдано для инвесторов определённых типов.

Характеристики портфелей и рынков динамически меняются во времени. В какой-то момент может оказаться, что монотонность портфеля нарушена, и какие-то портфельные альтернативы начинают доминировать другие. В этот момент совершается переток капитала из неоптимальных портфелей в оптимальные, и монотонность восстанавливается. В качестве примера такого перетока можно назвать массовый сброс акций в 2001 году, с уходом инвесторов в корпоративные облигации. Перелив капитала вызвал сдувание надутого там пузыря, масштабное снижение цен и восстановление рынка акций до инвестиционно-приемлемого уровня. Когда паритет был восстановлен, начался медленный возврат спекулятивного капитала в акции и фиксация ценовых уровней. Массовые инвесторы, которые не успели выйти из акций на волне сброса, получили огромные убытки, потеряв до 50% инвестированного капитала и более. В этой связи, оказалась незавидной роль финансовых аналитиков, призывавших рядовых инвесторов «сидеть ровно» и не сбрасывать акции.

2.6. Простейший портфель из двух активов

Рассмотрим простейший случай портфеля из двух акций A и B. Всего следует рассмотреть шесть вариантов инвестирования в такой портфель, и эти варианты складываются из следующего: портфель может быть монотонным или немонотонным, а корреляция между акциями может быть полной положительной, нулевой и отрицательной. Пойдём по порядку.

Вариант 1. Монотонный портфель, полная положительная корреляция ($\rho = 1$). Выполняется условие монотонности:

$$r_2 > r_1,\ \sigma_2 > \sigma_1. \qquad (2.33)$$

В этом случае, соотношения для (2.6) и (2.7) для портфеля приобретают вид:

$$r = x_1 r_1 + x_2 r_2,$$

$$\sigma = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2. \qquad (2.34)$$

Поскольку x₂ = 1 – x₂, то можно исключить веса активов из формул (2.34), перейдя к зависимости r = r(σ), которая имеет линейный вид:

$$r = \sigma\frac{r_1-r_2}{\sigma_1-\sigma_2}+\frac{\sigma_1 r_2-\sigma_2 r_1}{\sigma_1-\sigma_2}. \qquad (2.35)$$

Портфельное облако в случае двух активов вырождается, превращается в свою криволинейную огибающую. В данном случае, эта огибающая приобретает линейный вид (рис. 2.3, а), причём эффективная граница совпадает с огибающей.

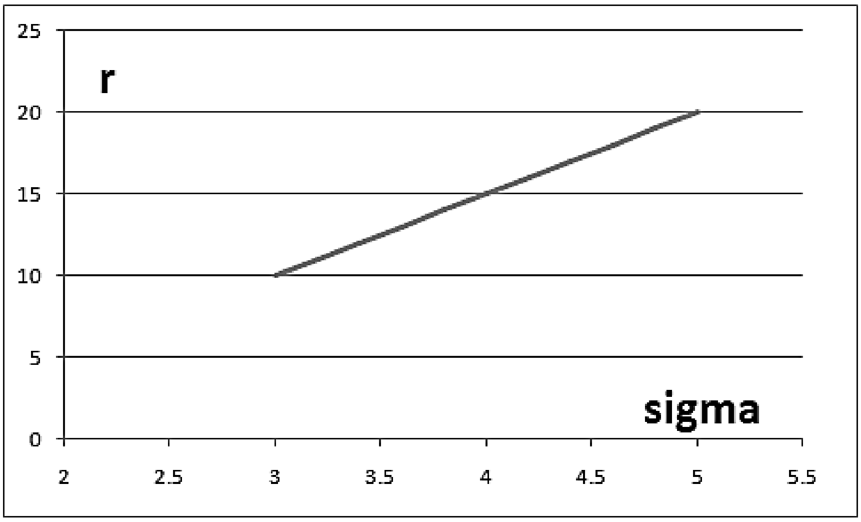


Рис. 2.3, а. Огибающая портфеля по варианту 1

Вариант 2. Монотонный портфель, нулевая корреляция (ρ = 0). Выполняется условие монотонности (2.33). В этом случае, огибающая портфеля представляет собой участок параболы (рис. 2.3, б), причём эффективная граница – это не вся парабола, а только её верхняя часть.

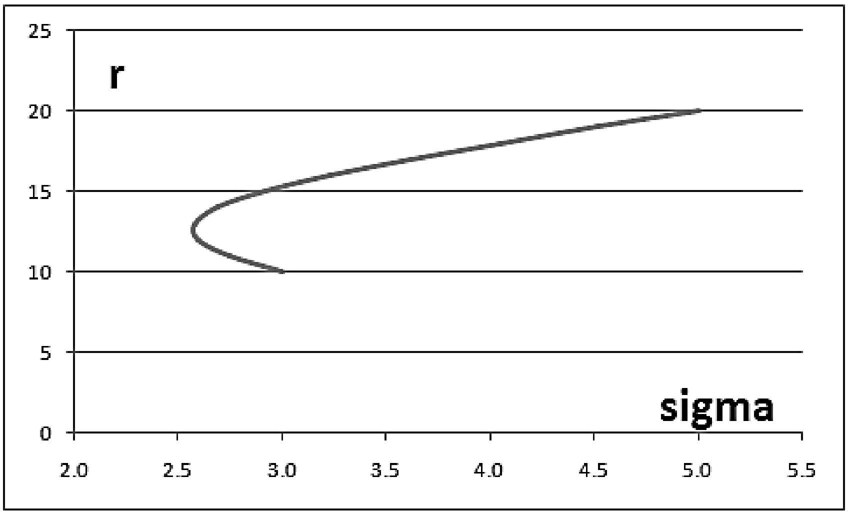


Рис. 2.3, б. Огибающая портфеля по варианту 2

Вариант 3. Монотонный портфель, полная отрицательная корреляция (ρ = -1). Выполняется условие монотонности (2.33). В этом случае, огибающая портфеля – это ломаная линия (рис. 2.3, в), причём эффективная граница – это не вся ломаная, а только её верхняя часть.

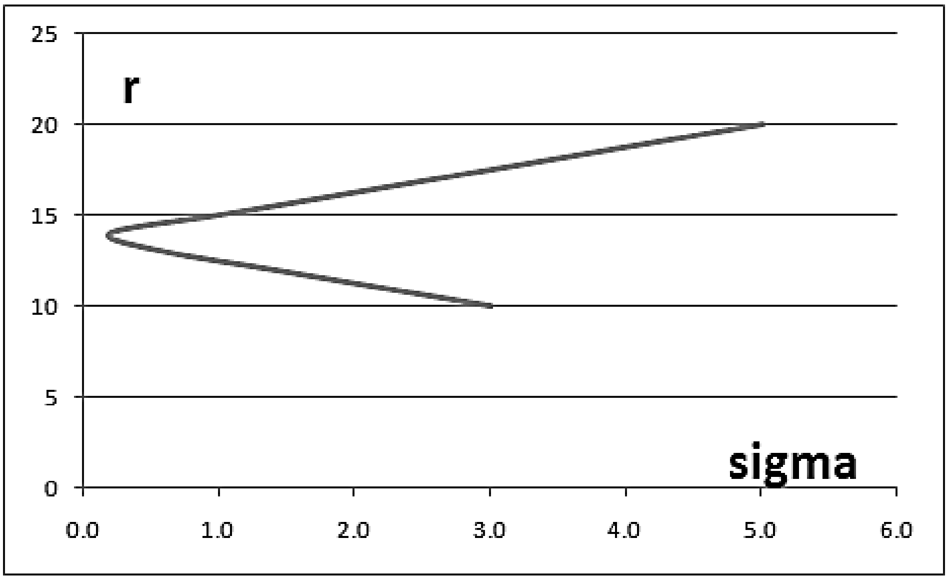


Рис. 2.3, в. Огибающая портфеля по варианту 3

На примерах вариантов 1-3 видно, что эффект отрицательной корреляции двух активов позитивно сказывается на портфеле с точки зрения минимизации его волатильности. Если два актива двигаются по цене строго в противоположных направлениях во всех случаях, то оказывается возможность стабилизировать цену портфеля, не допуская её глобального снижения. Возникает страховой эффект.

Рассмотрим теперь варианты немонотонного портфеля, когда справедливо:

$$r_2 < r_1,\ \sigma_2 > \sigma_1\ . \qquad (2.36)$$

Кажется, что, раз портфель немонотонный, то актив 2 проигрывает активу 1 во всех случаях, поэтому он должен быть удалён из оптимального портфеля. Однако это не совсем так, и здесь свою роль начинает играть феномен отрицательной корреляции.

Вариант 4. Немонотонный портфель, полная положительная корреляция (ρ = 1). Выполняется условие немонотонности (2.36). В этом случае, огибающая портфеля – это отрезок убывающей прямой линии (рис. 2.3, г), причём эффективная граница – это только верхняя точка отрезка.

Граница полностью вырождается, второй актив в этом случае действительно не попадает в оптимальный портфель.

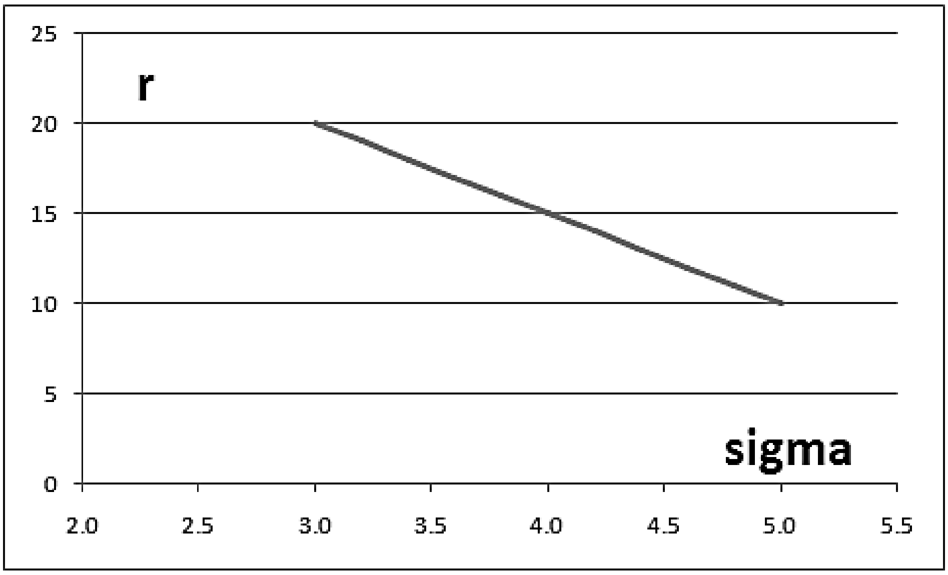


Рис. 2.3, г. Огибающая портфеля по варианту 4

Вариант 5. Немонотонный портфель, нулевая корреляция (ρ = 0). Выполняется условие немонотонности (2.36). Огибающая портфеля приобретает параболический вид (рис. 2.3, д), и в этом случае вырождение эффективной границы прекращается, она теперь – верхний участок параболы, второй актив начинает попадать в оптимальный портфель.

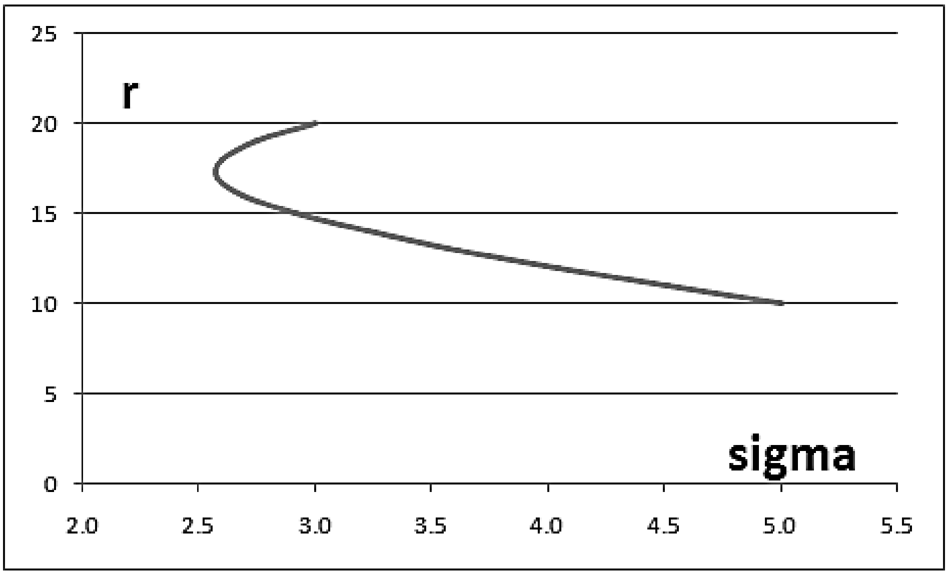


Рис. 2.3, д. Огибающая портфеля по варианту 5

И, наконец, **вариант 5.** Немонотонный портфель, полная отрицательная корреляция (ρ=-1). Выполняется условие немонотонности

(2.36). Огибающая портфеля – снова фрагмент ломаной линии (рис. 2.3, е), эффективная граница – верхний участок ломаной.

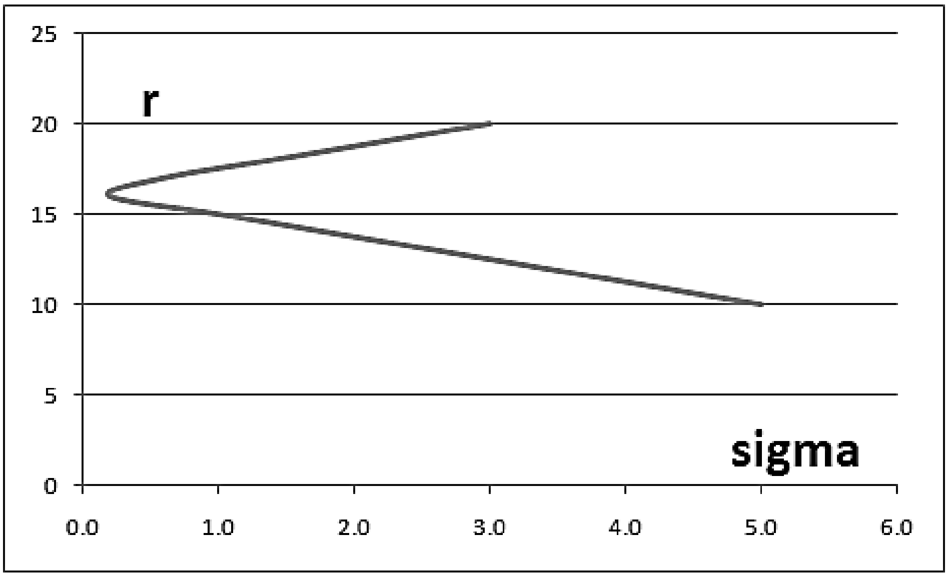


Рис. 2.3, е. Огибающая портфеля по варианту 6

Видно, что в условиях неполной корреляции, в оптимизацию проникают неоптимальные активы. Этот случай можно считать экзотическим, нишевым, переходным, потому что, как уже отмечалось, немонотонность – это временное состояние рынков, которое быстро проходит. Поэтому долгосрочной портфельной ставки на доминируемые активы делать не приходится. На интервалах инвестирования полгода и более слабые активы надо просто игнорировать и в портфель не включать; в пределах полугодия они могут временно поучаствовать в портфеле, в порядке краткосрочной спекулятивной игры.

Пример 2.7. Рассмотрим портфель по варианту 1, в котором r_1 =10, σ_1 = 3, r_2, = 20, σ_2 = 5 (всё в процентах годовых). Также ρ = 1. Построить огибающую портфельного облака (она же – его эффективная граница).

Решение. Уравнение огибающей (2.35):

$$r = \sigma\frac{10-20}{3-5} + \frac{3*20-5*10}{3-5} = 5\sigma - 5.$$

Координата правой точки эффективной границы (σ, r) = (5,20), 100% актива 2 в портфеле; координата левой точки границы – (3, 10), что отвечает 100% актива 1 в портфеле.

Выводы по разделу 2

Все исследования в части оптимизации фондового портфеля можно разделить на четыре основные фазы: а) теория многокритериального выбора Парето; б) классическая теория Марковица, сложившаяся в 50-60-х годах прошлого века; в) теория группы Шарпа (модель CAPM); г) современные теории портфельной оптимизации, в том числе базирующиеся на применении нечётко-множественных подходов. В настоящем разделе 2 описываются подход Парето и подход Марковица.

Для большей ясности изложения, приводятся примеры анализа и риска простейших фондовых портфелей, состоящих из двух активов.

Вопросы для самопроверки

1. Чем волатильность актива (или портфеля) отличается от его риска?
2. Что такое доминирование по Парето?
3. Чем прямая задача оптимизации по Марковицу отличается от двойственной к ней задачи оптимизации?
4. Что такое монотонный портфель? Почему глобальные финансовые рынки – монотонны?
5. Может ли доминированный по Парето актив участвовать в оптимальном фондовом портфеле?
6. Когда эффективная граница портфельного множества вырождается в точку?
7. При каких условиях эффективная граница портфельного множества имеет линейный вид?

РАЗДЕЛ 3. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОРТФЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

3.1. Критика теории Марковица

Появление результата Марковица вызвало настоящую эйфорию в научных кругах и у практиков фондового менеджмента. Действительно, впервые принцип золотого правила инвестирования впервые нашёл столь тщательное научное обоснование. Сегодня модель Марковица – это классика, с неё начинается обучение портфельному менеджменту повсеместно. Однако и на Солнце есть пятна. Многолетний опыт применения модели Марковица в практических задачах выявил довольно широкий спектр проблемных полей, к числу которых относятся следующие.

- **Вероятностные распределения активов не являются нормальными.** Исследования показали, что существенная вероятностная мера сосредоточена на концах функций плотностей распределений (проблема т.н. «**толстых хвостов**»). Это обусловлено событиями «**ралли**» (резкого взлёта рынков на новостях), а также событиями **паники** на тех же новостях. Раз распределения доходности активов не являются нормальными, то нет нормальности и по портфелю (принцип аддитивности перестаёт работать).
- **Распределения вообще не могут рассматриваться с классической вероятностной точки зрения.** Факты ралли и паники – это факты излома тенденции, смены парадигмы. Соответственно, как уже отмечалось, исторически накопленная статистика по бумагам обесценивается, перестаёт быть полезной, и морально устаревшую статистику нельзя рассматривать совместно со статистикой более свежего происхождения. Пропадает фактор статистической однородности, вероятностные распределения перестают носить частотный смысл, в них появляются меры экспертной уверенности, параметры распределений размываются. Возникают гибридные нечётко-вероятностные формализмы, которые далеко уходят за границы классической модели.
- **Проблема производных ценных бумаг.** Включение в портфель деривативов вызывает существенные изломы в гладких кривых распределений. Например, введение в портфель put-опционов вызывает эффект **хеджирования**, что вызывает усечение

вероятностной меры на левом конце распределения доходности по базовому активу. Эти обстоятельства тоже приводят к невозможности использовать модель Марковица для сложных портфелей с деривативами.

- **Волатильность – это не риск.** В модели Марковица любое отклонение от среднего, в плюс или в минус, рассматривается как риск. В то же время, для инвестора эти отклонения неравнозначны по последствиям, и переживает он эти отклонения с различной степенью интенсивности (об этом говорят работы Д. Канемана и А. Тверски, Нобелевская премия по экономике за 2002 год). Значит, надо оценивать риск с других позиций – например, с позиций объективных предпочтений инвестора. Из этого сразу вытекают нормативы по предельно низкой доходности портфеля, а также риск, как вероятность или возможности выхода доходности портфеля за норматив. Красивая математика модели Марковица тут же перестаёт работать.

Поэтому на смену подходу Марковица начали приходить другие, более совершенные и адекватные, хотя и более сложные с точки зрения восприятия подходы. Рассмотрим ряд из них.

3.2. Анализ портфеля, содержащего безрисковый актив

Рассмотрим портфель, в котором находится высоконадёжная низкопроцентная облигация (актив 1) и волатильная акция (актив 2). В науке за таким портфелем закрепилось название «**портфель Тобина**». Можно признать актив 1 безрисковым, если его волатильность на порядок и более низкая, чем то же для актива 2. На практике, так оно и есть. Соответственно, полагаем $\sigma_1 = 0$. С точки зрения вероятностной теории, уравнения (2.6) и (2.7) для доходности и волатильности портфеля принимают следующий вид:

$$r = x_1 r_1 + x_2 r_2,$$

$$\sigma = x_2 \sigma_2. \qquad (3.1)$$

Видно, что из формул полностью ушла корреляция активов (её значение не играет роли). Поскольку $x_2 = 1 - x_2$, то можно исключить веса активов из формул (3.1), перейдя к зависимости $r = r(\sigma)$, которая имеет линейный вид:

$$r = r_1 + \sigma \frac{r_2 - r_1}{\sigma_2} \tag{3.2}$$

Будем далее называть (3.2) уравнением Тобина. Обозначим:

$Sh = (r_2 – r_1) / \sigma_2$ - (3.3)

коэффициент пропорциональности в линейной зависимости вида (3.2), которая есть не что иное, как уравнение огибающей портфельного облака, совпадающее с самим облаком и с эффективной границей. Тогда

$r = r_1 + Sh*\sigma$ (3.4)

Из (3.4) следует, что принятие на себя инвестором дополнительного рыночного риска сопровождается встречным требованием дополнительной доходности, причём на каждый дополнительный процент волатильности инвестор требует Sh% дополнительной доходности. По экономическому смыслу, $Sh > 1$, поскольку дополнительная доходность должна расти быстрее дополнительного риска, иначе принимать эти дополнительные риски нецелесообразно. По факту, так оно и происходит. Если в реалиях «хороших времён» развитого рынка средняя курсовая доходность по акциям составляет r_2 = 20-25% годовых, при волатильности σ_2 = 10-15% годовых, то доходность на рынке облигаций не превышает r_1 = 7% годовых (уровень по корпоративным облигациям). Соответственно, Sh колеблется в пределах 1.2 – 1.4. Когда наступают «плохие времена» (как сейчас), рынок акций стагнирует, $Sh < 1$. И это тревожный сигнал к тому, что монотонность глобального финансового портфеля всё ещё сохраняется, но вот-вот вот пропадёт, потому что инвестировать в облигации становится безопаснее (во-первых), а потом и просто выгоднее (во-вторых). Переход Sh за нормативное значение 1 – это выстрел стартового пистолета для перелива капитала из акций в облигации и иные активы.

Пример 3.1. Какой нижний предел доходности r_2 по акциям должен быть ориентиром, если доходность по облигациям надёжных эмитентов в РФ составляет r_1 = 10% годовых, а сложившаяся на рынке акций волатильность составляет σ_2 = 20% годовых?

Решение. Поскольку предельный уровень Sh=1, то, в соответствии с (3.3), $r_2 = r_1 + \sigma_2 = 10 + 20 = 30\%$ годовых.

3.3. Модель САРМ

После того, как применение модели Марковица встретило первые затруднения, ряд исследователей-экономистов решили создать модель, которая бы точнее подходила к условиям глобальных финансовых рынков. В основу этой модели, которая получила затем название САРМ – Capital Asset Pricing Model, легли следующие соображения:

- Всю совокупность мировых финансовых рынков можно представить себе как обобщённый портфель Тобина из двух активов: безрискового и рискового, при этом данные активы не доминируют друг друга по Парето, т.е. образуют оптимальный фондовый портфель во всех случаях. Эффективная граница такого портфеля – отрезок прямой линии, пересекающий ось ординат в левой точке границы (0, r_1), где r_1 – средневзвешенная ставка по безрисковым активам. Наклон этой прямой в каждый период инвестирования обуславливается глобальными макроэкономическими соображениями. В периоды развития экономики портфель Тобина является монотонным; в кризисные времена монотонность временно пропадает, начинается перелив капитала от рисковых активов в сторону безрисковых.
- Все рисковые активы сильно коррелированны друг с другом, вплоть до полной положительной корреляции. Связано это с тем, что в условиях глобального и быстрого информирования о состоянии финансовых рынков все инвесторы реагируют на рыночные новости с одинаковой скоростью и в одинаковом направлении. Выражаясь словами Дж. Сороса, «инвесторы ходят стадами».
- Положительная коррелированность рисковых активов позволяет говорить о сильной связи между динамикой отдельного рискового актива и динамикой рынка. Эта связь может быть выражена как линейная регрессия. Актив может расти быстрее рынка, но и падать в этом случае он будет тоже быстрее рынка.

Тогда ожидаемая доходность рискового актива r_2:

$$r_2 = r_1 + \beta_2 * (r_M - r_1) = r_1 + \sigma_2 * (r_M - r_1) / \sigma_M, \qquad (3.5)$$

где r_M – ожидаемая доходность по рисковой составляющей рынка, σ_M - волатильность рисковой составляющей рынка, $\beta_2 = \sigma_2 / \sigma_M$ – бета-коэффициент линейной регрессии, связывающий доходность по данному активу и доходность по рисковой составляющей рынка. Это и есть ключевое уравнение модели CAPM.

Можно переписать (3.5) в следующем виде:

$$\beta_2 = \frac{\partial(r_2 - r_1)}{\partial(r_M - r_1)} = \frac{\partial r_2}{\partial r_M}. \tag{3.6}$$

Выражение (3.5) очень похоже на уравнение Тобина (3.2), но есть серьёзное смысловое отличие. Само уравнение Тобина, в котором в качестве параметров выступают показатели безрисковой и рисковой составляющей финансового рынка, называется **рыночной линией капитала** (CML – capital market line). А соотношение (3.5) – это уравнение линейной регрессии, устанавливающее связь между рыночной линией для r_1 и r_M - и уравнением Тобина для r_1 и r_2 (см. рис. 3.1).

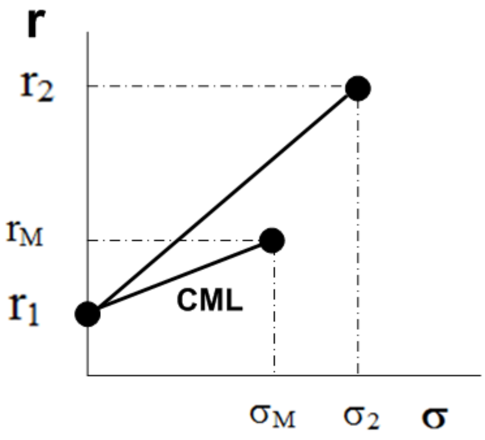


Рис.3.1. Уравнения Тобина для рынка и для отдельного актива

Подразумевается, что два актива – безрисковый рынок и рисковый рынок – лежат на рыночной линии капитала, а отдельный актив лежит выше или ниже рынка по тенденциям роста/спада, в зависимости от своего бета-коэффициента β2.

Требование рациональных инвестиций подразумевает, что β2 > 1, иначе инвестирование в отдельный рисковый актив теряет смысл.

Гораздо доходнее тогда инвестировать **в сам рынок**, в его рыночный индекс. Если $\beta_2 = 1$, то $r_2 = r_M$, и актив по тенденции совпадает с рынком. Чем волатильнее актив, тем выше требования к нему по доходности (золотое правило инвестирования). На рис. 3.1 как раз показан случай $\beta_2 > 1$, когда рынок и актив образуют пару недоминированных альтернатив по Парето.

Модель CAPM была разработана группой экономистов под руководством У. Шарпа. Этот результат был вознаграждён Нобелевской премией в 1990 году.

Пример 3.2. Для акции, на основе статистических измерений, известно $\beta_2 = 1.5$. Параметры доходности рынка акций: по безрисковой составляющей – 8% годовых, по рисковой – 20% годовых. Какой доходности мы вправе ожидать от акции при указанных условиях?

Решение. В соответствии, с (3.5),

$r_2 = 8 + 1.5* (20 - 8) = 26\%$ годовых.

Обратим внимание, что мы получили результат, не прибегая к специальной оценке волатильности рынка или актива. Связь возникает напрямую между доходностями.

3.4. Оптимизация фондового портфеля в нечёткой постановке задачи

Критика теории Марковица распространяется гораздо дальше самого метода Марковица, она ставит под сомнение вероятностный подход, применительно к портфельному моделированию. Всё к тому, что в современных условиях мы наблюдаем постепенный перенос акцента от вероятностных к невероятностным (в т.ч. нечётко-множественным) моделям. Модифицируются критерии для оценки портфеля, увеличивается их численность в одновременном рассмотрении (ставятся и решаются задачи многокритериальной оптимизации). При этом поле оптимизации Парето из двумерного превращается в многомерное.

Мы остаёмся в двукритериальном поле, но содержание критериев принципиально меняется. Во-первых, мы перестаём рассматривать волатильность как меру риска; под риском актива и портфеля мы понимаем падение доходности ниже норматива (см. параграф 2.2. настоящего тома пособия). Во-вторых, мы рассматриваем в качестве критерия для оценки портфеля не на математическое ожидание доходности в вероятностном смысле, а субъективно-экспертное ожидание доходности, сформированное на основе полного контекста собранных свидетельств о рынке, в том числе с учётом обесценения статистики вследствие парадигмальных изломов. Статистика в этом случае превращается в **квазистатистику**, а риск становится не вероятностью, а **возможностью**, ожидаемостью.

При смене каркаса моделирования оставался один непреодолённый в теоретическом отношении вопрос: как быть с корреляционной матрицей, со связью случайных величин доходности. Специальные исследования (в том числе [22]) показали, что в условиях существенной неопределённости в отношении данных по активам и рынкам, вклад корреляционной матрицы в оптимальное решение оказывается на порядок менее значимым, чем вклад разброса по доходности и риску активов. Если ещё принять за основу практически полную положительную корреляцию активов на рынке (предпосылка модели CAPM), то на первый план начинает выходить теория монотонности портфеля (см. параграф 2.5). Оптимальный портфель – это, прежде всего, монотонный портфель, лежащий на границе между точками безрискового и максимально рискового активов. И нужно проследить, как меняется весовое распределение активов в портфеле, по мере сканирования границы справа налево.

Значит, нужно обратить особо пристальное внимание на моделирование нечёткого числа доходности актива, с оговоркой на срок существования портфеля. Простейшей в этом плане схемой является представление доходности как треугольного нечёткого числа. Тогда доходность по портфелю – это тоже треугольное нечёткое число, риск по которому определяется формулами (2.19) – 2.23 (см. параграф 2.2, части 2). Теперь каждый актив может быть представлен вертикально ориентированным отрезком в двумерном поле «ожидаемая доходность – риск». Соответственно, и произвольный портфель может быть представлен отрезком. Тогда эффективная граница портфельного множества есть не что иное, как **криволинейная полоса**.

Задача оптимизации для этой модели может звучать так: максимизировать среднеожидаемую доходность при фиксированном риске и весовых ограничениях (прямая задача). Двойственная к ней задача: минимизировать риск при фиксированной среднеожидаемой доходности и весовых ограничениях. Математическая запись для прямой задачи:

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid r \to \max,\ \mathrm{Risk} = \mathrm{const}. \tag{3.7}$$

Для двойственной задачи:

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid \mathrm{Risk} \to \min,\ r = \mathrm{const}, \tag{3.8}$$

Решение у прямой и у двойственной задач одно – эффективная граница, которая может быть установлена градиентным методом, в соответствии со следующим алгоритмом (без учёта весовых ограничений):

- В качестве нулевой итерации зафиксируем портфель, в котором 100% принадлежит проекту с максимальным уровнем среднеожидаемой доходности (правая точка эффективной границы портфеля). Здесь под точкой мы уже понимаем отрезок, образованный тремя координатами нечёткого числа доходности.
- Затем выделим некоторую долю-дискрет Δx_i, например 10% суммарной весовой меры портфеля. Попробуем перенаправить эту дискретную инвестицию из крайнего портфеля правой точки в сторону одного из активов. В результате такого **ребалансинга** возникает новый портфель с новыми характеристиками r и Risk. Планово, при сканировании эффективной границы справа налево, наблюдается одновременное снижение среднего значения доходности портфеля R на величину $\Delta R > 0$ и риска на величину $\Delta Risk > 0$.
- Обозначим:

  $$Grad = \Delta R / \Delta Risk \text{ -} \qquad (3.9)$$

  градиент снижения доходности портфеля по уровню риска. Тогда, чтобы решить задачу оптимизации на очередном шаге итерации, необходимо потребовать, чтобы в ходе ребалансинга портфеля одновременно выполнялось два условия:

  $$Grad = \min, \; Grad > 0. \qquad (3.10)$$

  Это соответствует формированию эффективной границы как набору недоминируемых альтернатив по Парето. Если правило минимального градиента не выполняется, то такое доминирование при ребалансинге оказывается возможным: возникает проигрыш по волатильности при сопоставимой доходности или проигрыш по доходности при сопоставимой волатильности.

- В ходе сканирования эффективной границы мы рассматриваем все возможные варианты перенаправления дискрета Δx_i, от актива с номером i к активу с номером j.

- Проходим эффективную границу справа налево, итерацию за итерацией, до тех пор, пока все возможные градиенты не становятся отрицательными. Это означает, что огибающая портфельного облака делает разворот, пройдя левую точку границы. Все остальные портфельные точки, находящиеся на огибающей портфельного облака, уже неоптимальны (доминируются точками эффективной границы). Здесь градиентный алгоритм останавливается.

Таким образом, задача оптимизации портфеля по Марковицу без учёта весовых ограничений решена. Рассмотрим пример.

Пример 3.3. Портфель из N=3 активов представлен в таблице 3.1. Обозначен норматив предельно низкой доходности L = 20% годовых. Построить эффективную границу в координатах (Risk, R).

Решение. Поскольку доходности из табл. 3.1 являются симметрично-треугольными числами, для оценки риска портфеля пользуемся упрощённой формулой (2.23):

$$Risk = \lambda + (1 - 2\lambda) * \ln(1 - 2\lambda)/2, \qquad (2.23)$$

где λ =(L-min)/(max – min). При λ=0 Risk =0, а при λ=0.5 L=av и Risk =0.5 (50%).

Таблица 3.1. Доходности трёх активов

N пп	min	av	max
1	20	25	30
2	22	30	38
3	10	35	60

Правую точку эффективной границы образует портфель со 100%-ым участием актива №3. Риск такого портфеля составляет 4.7%. Работа алгоритма градиентной оптимизации представлена в табл. 3.2. Цветом в таблице подкрашены точки, лежащие на эффективной границе. Полученная эффективная граница представлена на графике рис. 3.2.

Видно, что сканирование эффективной границы справа налево приводит к тому, что идёт одновременно убывание доходности портфеля, его волатильности и его рисковости. Полоса сжимается по ширине, доходя до своего предельного размера в безрисковом случае.

Таблица 3.2. Результат алгоритма градиентной оптимизации

k	x1	x2	x3	R	Risk*1000	Градиент
0	0	0	1	35	47	
1	0.1	0	0.9	34	45	0.50
	0	0.1	0.9	34.5	41	0.08
2	0.1	0.1	0.8	33.5	39	0.50
	0	0.2	0.8	34	35	0.08
3	0.1	0.2	0.7	33	32	0.33
	0	0.3	0.7	33.5	29	0.08
4	0.1	0.2	0.7	33	32	-0.17
	0	0.4	0.6	33	23	0.08
	0.1	0.3	0.6	32.5	25	0.25
5	0.1	0.3	0.6	32.5	25	-0.25
	0.1	0.4	0.5	32	18	0.20
	0	0.5	0.5	32.5	16	0.07
6	0	0.6	0.4	32	10	0.08
	0.1	0.4	0.5	32	18	
	0.1	0.5	0.4	31.5	12	0.25
7	0	0.7	0.3	31.5	4	0.08
	0.1	0.6	0.3	31	5	0.20
	0.1	0.5	0.4	31.5	12	
8	0	0.8	0.2	31	0	0.13
	0.1	0.6	0.3	31	5	
	0.1	0.7	0.2	30.5	1	0.33

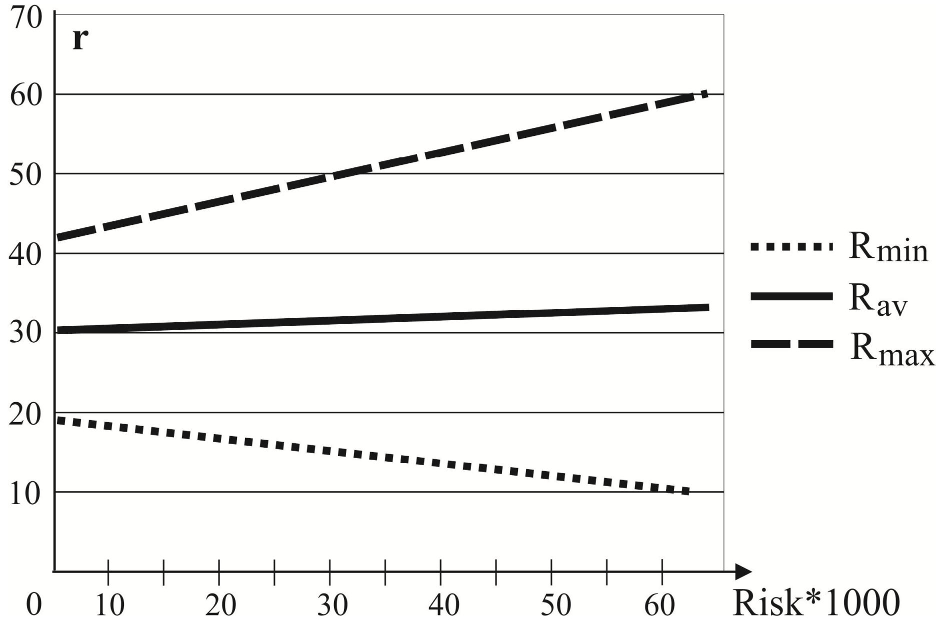


Рис. 3.2. Эффективная граница портфельного множества как криволинейная полоса

Также надо обратить внимание, что актив №1 не участвует в формировании эффективной границы, несмотря на свою явную безрисковость. Оказывается, что этот актив доминируется портфелем, в котором 80% актива 2 и 20% актива 3. Этот портфель тоже безрисковый, но его ожидаемая доходность значительно выше, как следует из координат треугольного числа его доходности: r = (19.6, 31, 42.4). Зато интересно наблюдение о волатильности актива №1. Она ниже, чем волатильность любого портфеля на эффективной границе. Поэтому, если бы оптимизация шла в двумерном поле «доходность – волатильность», то эффективная граница была бы другой. Предоставляем читателям пособия проверить это утверждение самостоятельно.

Теперь вернёмся, как и в случае градиентной оптимизации в вероятностном подходе, к вопросу о соблюдении в алгоритме весовых ограничений вида (2.28). Это делается на всех шагах градиентного алгоритма, начиная с нулевого. Если уже на нулевом шаге не удаётся залить портфель правой точки эффективной границы каким-либо одним активом, то идёт заполнение этого портфеля последовательно всеми активами, расположенными по убыванию максимума доходности, вплоть до заполнения. Затем, пошагово проходя градиентный алгоритм, в ходе каждого очередного ребалансинга мы проверяем его соответствие ограничениям (2.28). Если ограничения не выполняются, то соответствующий вариант ребалансинга отбрасывается.

Итак, мы видим, что градиентный метод работает устойчиво в любой парадигме – вероятностной или нечётко-множественной. Он может быть легко обобщён на многокритериальный случай. Представляется, что этот метод является единственно возможным для Парето-оптимизации, когда критерии оптимизации формулируются в самом общем виде. Методу, в известном смысле, всё равно, какие аналитические соотношения лежат в основе построения множества альтернатив. И это его неоспоримое достоинство, в сочетании с несомненной простотой.

3.5. Теория модельных портфелей. Инвестиционная декларация паевого фонда

Западная практика портфельной оптимизации давно использует двухуровневую схему оптимизации, основанную на оптимизации портфелей реальных активов только во вторую очередь. В первую очередь, оптимизации подлежат **модельные,** или индексные, портфели, компонентами в которых являются виртуальные активы, основанные на использовании рыночных индикаторов – индексов.

Сегодня в США все эмитенты, с точки зрения их отраслевой принадлежности, сгруппированы по 9 отраслям [26]. Внутри каждой отрасли выделено несколько экономических секторов, и за каждым сектором закреплён свой рыночный индекс. Таким образом, совокупное число поддерживаемых индексов доходит до сотни. Столько же финансовых мини-рынков может быть представлено в модельном портфеле.

Каждый индекс может быть проанализирован как актив, по правилам, как это сделано в параграфах 2.1 и 2.2. Могут быть оценены такие параметры, как доходность, волатильность, риск, объёмы торгов, с учётом парадигмальных разрывов в экономической статистике. Эта информация может быть основой для предсказания рыночного тренда (см. раздел 5).

Если каркас моделирования вероятностный, то можно оценить параметры корреляционной матрицы для портфеля индексов. Чем более положительно коррелированны индексы, тем меньше толку в использовании этой матрицы, тем более вид эффективной границы приближается к линейному, и всё более и более интересным становится искать бета-коэффициенты для индексов, в соответствии с принципами модели CAPM.

Модельный портфель – это, видимо, тот последний оазис, где применение схемы оптимизации по Марковицу ещё может принести некоторый содержательный результат. Что же касается портфеля на реальных активах, да ещё содержащего деривативы, там эта схема применена быть уже не может, нужны другие методы оптимизации. Когда оптимальная структура модельного портфеля уточнена, можно приступать к его наполнению реальными активами (второй уровень оптимизации). И здесь нужно гораздо более внимательно отнестись не к той доходности, которая уже была показана активами, а к степени их текущей недооценённости относительно сложившегося рационального уровня. Зная меру этой недооценённости, можно предсказать расчётный всплеск уровня доходности соответствующих активов и портфеля в целом.

В США весьма распространена практика паевых инвестиционных фондов (mutual funds), которые как раз и настроены на предварительное само-структурирование в терминах модельных активов. С некоторых пор, такая практика нашла своё применение и в России (правда, в значительно меньших объёмах). Паевые фонды, с точки зрения своего стиля, можно подразделить на агрессивные, консервативные и смешанные, в зависимости от весового соотношения между безрисковыми и рисковыми активами в портфеле фонда. Также фонды могут быть чётко сегментированы по отраслям (например, принимать в свои портфели только акции и облигации эмитентов нефтегазового холдинга). Можно говорить также и о фондах фондов, т.е. о глобальной диверсификации. Также фонды могут обладать различной географической локализации, формируясь либо в условиях отдельных стран, либо на международном финансовом рынке.

Например, когда Пенсионный Фонд РФ (ПФР) рассматривал вопросы об инвестировании накопительной части пенсии в международные активы, ему было предложено рассмотреть модельный портфель на 20 индексах акций, облигаций, банковских депозитных сертификатов. По каждому из этих индексов на тот момент была собрана представительная статистика и уточнены существенные параметры доходности, волатильности и риска [3]. Были рекомендованы оптимальные весовые распределения для инвестирования, в зависимости от типа инвесторов. Однако ПФР отказался от проведения самостоятельной инвестиционной политики, перепоручив этот стратегический вопрос на усмотрение управляющих компаний.

Во всех случаях, фонды должны описать свой стиль и намерение в **инвестиционной декларации**. Одним из существенных атрибутов такой декларации является набор весовых ограничений на присутствие в портфеле модельных активов той или иной направленности. Так, по практике, в консервативных фондах доля акций не может превышать 20% (иногда подобные фонды отказываются от акций совсем, целиком сосредотачиваясь на надёжных облигациях). Наоборот, в агрессивных фондах доля облигаций никогда не превышает 40-50%, зато в структуру агрессивных портфелей попадают деривативы, что совсем неприемлемо для портфелей консервативной направленности.

Каждый паевой фонд, проектируя свою инвестиционную декларацию, настраивается на определённый тип инвестиционного поведения, настраиваясь на определённую целевую аудиторию покупателей своих паёв. Одновременно с этим, фонд должен удовлетворить требованиям законодательства. Например, в России запрещена деятельность **хедж-фондов** (в чьих портфелях находятся деривативы, недвижимость, антиквариат).

3.6. Принцип рационального инвестиционного поведения. Типы финансовых инвесторов

В качестве инвестора на финансовых рынках может выступать как индивидуальный игрок, так и домашнее хозяйство, в зависимости от правового режима, сложившегося между субъектами домохозяйства. Напрямую рациональное инвестиционное поведение обусловлено жизненным циклом инвестора и его текущим благосостоянием, его не только субъективной, но и объективной способностью рисковать своими деньгами, иммобилизовывать излишки денежного капитала.

Если разбирать поведение инвестора в парадигме «жадность – страх», то выразителями этих категорий будут доходность и риск соответственно. Каждый инвестор, в зависимости от своих субъективных и объективных предпочтений, может быть спозиционирован по двум направлениям: в части своих запросов по отдаче на инвестиции и в части своей терпимости к риску (risk tolerance). Если эти два требования вступают в конфликт (например, желание получать прибыли много и сразу, причём совсем без риска), то инвестор неспозиционирован, он неадекватен, нерационален. Иррациональные инвестиционные предпочтения нами здесь не рассматриваются, это область психиатрии.

Рациональный инвестор осознаёт действие золотого правила инвестирования, когда доходность корреспондируется с риском. Его задача, в этом плане – осознать своё место на рыночной линии CML в смысле модели CAPM, ощутить свои инвестиционные предпочтения и отвечающие этим предпочтениям рыночные границы.

В свете сказанного, все инвесторы могут быть распределены на три больших класса:

- **Агрессивный инвестор** – такой, для которого доходность – это максимизируемая целевая функция, а риск – слабое ограничение сверху. Он решает прямую задачу оптимизации своего портфеля. Думая об этом типе, на память приходит сказка об орле и вороне из «Капитанской дочки» Пушкина: *«Чем триста лет питаться падалью, лучше один раз напиться живой крови, а там что Бог* *даст».* Терпимость агрессивного инвестора к риску – максимальна, для него инвестиции сродни игре в покер. Вот они, покупатели акций третьего эшелона, «мусорных» облигаций, непокрытых деривативов. Агрессивный инвестор позиционируется на правом фланге эффективной границы портфельного множества.

- **Консервативный инвестор,** напротив, старается минимизировать риск, и в этом случае доходность для него – слабое ограничение снизу. Здесь решается двойственная задача оптимизации. Вспоминается цитата из Екклесиаста по этому поводу: *«Лучше горсть с покоем, чем пригоршни с суетой и томлением духа».* Типичный пример такого рода инвесторов – это пенсионер, живущий на ренту от банковских депозитов и государственных облигаций. Консервативные инвесторы оккупировали левую часть эффективной границы портфеля финансовых рынков.
- **Промежуточный инвестор** занимает середину эффективной портфельной границы и не обладает выраженным предпочтением, что считать целевой функцией – доходность или риск. Типичный портфель промежуточного инвестора – 50% акций + 50% облигаций. Промежуточный инвестор не терпит крайностей. Он не пойдёт в непокрытые опционы, но и банковскими депозитами он тоже побрезгует. В своё время, при описании инструмента облигаций на Yahoo было использовано забавное присловье: «бонды несексуальны». Это – взгляд промежуточного инвестора, его карта мира.

Во всех точках рыночной линии, как уравнения Тобина, коэффициент Шарпа является одинаковым и постоянным, поскольку рыночная линия – отрезок прямой. Это говорит о равномерном действии золотого правила инвестирования вдоль всей рыночной линии: невозможно получить дополнительные преимущества на открытых рынках, где все имеют доступ к одной и той же информации и реагируют на неё одинаково. Больше доходности – больше риска, и наоборот. Но всегда можно поделить эффективную границу портфельного облака пополам, найти среднюю точку границы с координатами (σ_{av}, r_{av}) и посмотреть, насколько выбор инвестора уклоняется от этой точки влево или вправо. Отсюда возникают **мера жажды доходности** Gr и **мера терпимости к риску** Gσ:

$$Gr = r / r_{av}, \tag{3.11}$$

$$G\sigma = \sigma / \sigma_{av}. \tag{3.12}$$

Можно произвести «жёсткое» нормирование факторов Gr и Gσ, и на основе этих нормативов специфицировать типы рациональных инвесторов (см. табл. 3.3).

Табл. 3.3. Нормативы для рациональных инвесторов

Тип инвестора	Нормативы
Агрессивный	$Gr > 1.2$ и $G\sigma > 1.2$
Промежуточный	$0.5 \le Gr \le 1.2$ и $0.5 \le G\sigma \le 1.2$
Консервативный	$Gr < 0.5$ и $G\sigma < 0.5$

Это же самое нормирование можно сделать более гибко, с применением теории нечётких множеств (см. раздел 1 учебного пособия «Финансовая математика»).

Пример 3.4. Портфель рационального инвестора x_2 = 80% акций и x_1 = 20% безрисковых облигаций. Доходность облигаций r_1 = 10% годовых, доходность акций r_M = 30% годовых, волатильность акций σ_M = 20% годовых. Определить тип инвестора.

Решение. Характеристики портфеля инвестора, в соответствии с уравнением портфеля Тобина (3.1):

$$r = x_1r_1 + x_2r_M = 20\%*10 + 80\%*30 = 26\% \text{ годовых},$$

$$\sigma = x_2\sigma_M = 80\%*20 = 16\% \text{ годовых}.$$

Коэффициент Шарпа по (3.3):

$$Sh = (30 – 10) / 20 = 1.$$

Координаты средней точки эффективной границы:

$$r_{av} = (r_1 + r_M) /2 = 20\% \text{ годовых},$$

$$\sigma_{av} = (0 + \sigma_M) /2 = 10\% \text{ годовых}.$$

Таким образом, жажда доходности по (3.11):

$$Gr = 26 / 20 = 1.3,$$

а терпимость к риску по (3.12):

$\sigma = 16/10 = 1.6$.

Выполняются оба норматива табл. 3.3, с точки зрения признания инвестиций агрессивными, равно как и типа инвестора. Однако надо обратить внимание, что по мере приближения к правому краю эффективной границы портфеля Тобина, риск растёт значительно быстрее, чем растёт доходность. Соответственно, при уточнении системы нормирования, инвестиции могут быть признаны иррациональными, поскольку такое опережение темпов риска над тем же по доходности – это слабый сигнал для потери портфелем свойства монотонности (временный отказ от инвестиций в акции). Это связано с низким углом наклона границы портфеля Тобина (Sh = 1).

Выводы по разделу 3

Теория Марковица уже четверть века подвергается обоснованной критике в научной среде, без умаления того выдающегося результата, который в ней получен. Все современные подходы к портфельной оптимизации ставят своей целью отход от классической парадигмы Марковица, от модификации исходных параметров модели Марковица до полной смены парадигмы исследования. В настоящем разделе пособия рассматриваются модели Тобина и Шарпа, а также авторские результаты, в том числе теория монотонного фондового портфеля и механизм градиентной оптимизации в нечёткой постановке задачи. Портфельная теория сейчас бурно развивается, и, несомненно, на свет будут появляться (и уже появляются) всё новые и новые оптимизационные методы и модели.

Также в настоящем разделе рассмотрены базовые принципы рационального инвестирования, с классификацией инвесторов в рамках трёх основных классов: агрессивные, консервативные, промежуточные инвесторы.

Вопросы для самопроверки

1. Почему теория Марковица подвергается критике?
2. Что такое «толстые хвосты»? Почему они возникают?

3. Что такое портфель Тобина?
4. Почему активы на финансовых рынках становятся положительно коррелированными?
5. Что такое коэффициент Шарпа? Почему он должен быть больше единицы?
6. Что такое временная потеря монотонности фондового портфеля? Почему такое иногда происходит?
7. Что такое CML?
8. На каких основаниях построена модель CAPM?
9. Почему корреляционную матрицу можно исключить из каркаса моделирования, при переходе от вероятностной к нечётко-множественной модели?
10. Можно ли проводить нечёткую оптимизацию портфеля, используя кусочно-линейные нечёткие числа для оценки доходности активов?
11. Что такое модельный портфель?
12. Что такое инвестиционная декларация паевого фонда?
13. Какие типы рационального инвестиционного поведения можно назвать? Какими критериями можно охарактеризовать тот или иной тип поведения?
14. Приведите пример иррационального инвестиционного поведения и возможные значения соответствующих критериев.
15. Почему риск рыночного портфеля может расти быстрее, чем его доходность? С чем это может быть связано?

РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ

4.1. Понятие фьючерса и базового актива

Первичные финансовые инструменты (акции, облигации, депозитные сертификаты, банковские векселя) представляют собой **базовые активы** финансового рынка. Суммарный денежный объём этих обязательств является ограниченным и конечным, определяется параметрами соответствующих эмиссионных соглашений. В то же время, объём производных финансовых инструментов (**деривативов**), привязанных к базовым активам, практически ничем не ограничен. Поэтому львиную долю мировых финансовых рынков занимают именно деривативы, а не базовые активы, как ни парадоксально это звучит. Например, объём деривативов, где в качестве базового актива выступают мировые «голубые фишки» (компании из списка S&P-500), может превышать объём выпуска базовых активов в сто и более раз.

Поэтому подавляющее большинство выпущенных деривативов являются **беспоставочным (расчётным)** инструментом, т.е. не предполагают фактического приобретения или продажи базового актива. Цель беспоставочного инструмента – определить разницу между ценами на базовый актив в рамках двух соседних торговых сессий; если идёт падение цены, выигрыш получает продавец дериватива, стоящий по нему в короткой позиции. Если цена растёт, выигрыш получает держатель дериватива, занимающий длинную позицию. Таким образом, сделка купли-продажи дериватива или заключения деривативного соглашения – это игра с нулевой суммой.

Рынок деривативов очень чувствителен к изменениям на рынке базовых активов. Этот рынок представляет собой своеобразный финансовый рычаг, где можно, продавая и покупая активы без обеспечения (без покрытия), извлекать доходы или убытки из ценовых разниц. Соответственно, как и всякий рычажный финансовый инструмент, рынок деривативов обладает огромными рисками, несопоставимыми с рисками на рынках базовых активов. По определению, приобретатель дериватива занимает **длинную позицию**, а продавец – **короткую позицию**.

Связь между товарными и финансовыми рынками устанавливается через рынок **фьючерсов** на классический биржевой товар. Фьючерс – это стандартный контракт на поставку заранее определённого количества биржевого товара по заранее оговорённой цене в будущем. Фьючерсы распределяются на поставочные и беспоставочные; как и в случае фондового рынка, объём фьючерсного рынка (объём открытых на нём позиций) кратно превышает объём стандартного товара, который, может быть, дажё ещё и не произведён (например, урожай зерновых).

Обозначим **y(t)** – фьючерсную цену товара за физическую единицу (баррель, бушель, унцию, тонну и т.д.) по состоянию на текущую дату t, в том числе на дату исполнения обязательств по сделке T (на дату **экспирации** контракта), **P(t)** – текущую спот-цену товара за физическую единицу, в том числе на момент исполнения фьючерсного контракта; **C** – ёмкость контракта в физических единицах, **N** – число стандартных контрактов в структуре сделки. Будем предполагать, что в один день совершается одна торговая сессия. Оценим доход/убыток покупателя контрактов. Но сначала опишем структуру сделки.

Фьючерсная контрактация предполагает весьма жёсткий характер условий исполнения сделки (гарантийный механизм), который заключается в следующем:

- Продавец и покупатель контрактов вносят на счета биржи гарантийные депозиты (DepSell(0) и DepBuy(0) соответственно), минимальный размер которых обеспечивает, с точки зрения биржи, безусловное исполнение текущих обязательств по сделке.
- Ежедневно клиринговый отдел биржи сверяет фьючерсную цену текущего дня (дата t) и вчерашнюю фьючерсную цену, вычисляя текущую **вариационную маржу** по сделке

$$VM(t) = N * C * (y(t) - y(t-1)), \qquad t = 1 \ldots T. \qquad (4.1)$$

- Если вариационная маржа по сделке положительная, выигрывает покупатель контракта. В этом случае продавец контракта обязан перевести эту маржу на счёт покупателя, списав её со своего гарантийного депозита. Если норматив по гарантийному депозиту оказывается сохранённым, никаких дополнительных действий производить не надо. Если же гарантийный норматив нарушен (условие наступления margin call), то биржа предлагает продавцу довнести средства на свой гарантийный депозит. Если продавец не в состоянии (или отказывается) довноситься, то биржа принудительно закрывает позицию продавца, и сделка аннулируется. Покупатель остаётся с маржой, биржа – с комиссионными, продавец – в временным убытком.

- Наоборот, если вариационная маржа отрицательная, выигрывает продавец, и переток маржи осуществляется в обратную сторону. Естественно, возникают аналогичные биржевые требования к покупателю.
- На момент исполнения контракта (на дату экспирации) автоматически выполняется y(T) = P(T), т.е. фьючерсная цена актива совпадает со спотовой. Поэтому с финансовой точки зрения без разницы, исполнять этот контракт по спотовой цене, или зафиксировать накопленную вариационную маржу. Если за период исполнения контракта кумулятивная (накопленная на дату T) вариационная маржа CVM(T) положительная, это выигрыш покупателя. Наоборот – выигрыш продавца. Выполняется:

$$\text{CVM (T)} = \sum_{t=1}^{T} VM(t) = \text{N*C*(y(T) – y(0)),}$$

$$\text{DepSell (T) = DepSell (0) – CVM (T),}$$

$$\text{DepBuy (T) = DepBuy (0) + CVM (T).} \qquad (4.2)$$

Пример 4.1. Определить финансовый результат сделки для держателя длинной позиции по 3 контрактам на кукурузу, если фьючерсные цены снизились за период исполнения контракта с y(0)=1.75 до y(T) = 1.69 центов за бушель. Единица контракта C=5000 бушелей.

Решение. Финансовый результат сделки – кумулятивная вариационная маржа по (4.2):

CVM = 3*5000*(1.69 – 1.75) = - 900 центов (убыток покупателя).

4.2. Понятие финансового опциона

Если фьючерсный контракт – это безусловное обязательство обеих сторон по купле-продаже базового актива, то **фондовый опцион** – это несимметричная сделка. Она предполагает безусловное обязательство продавца опциона (**райтера**) купить или продать фондовый базовый актив (подлежащий актив) в заранее оговорённую дату (дату экспирации) по заранее оговорённой цене, называемой **страйком** (обозначение y). В свою очередь, покупатель опциона (**держатель**) приобретает право купить (CALL) или продать (PUT) базовый актив по цене страйка в дату экспирации. За указанное право держатель уплачивает райтеру **опционную премию** (обозначение z).

Райтер, уступая опцион держателю, рассчитывает на то, что необходимость исполнять этот опцион у держателя не возникнет, поскольку держатель неверно угадает направление рынка. Если так получится, райтер остаётся в выигрыше в размере опционной премии или её части. Если выигрывает держатель, то райтер терпит неограниченные убытки.

Все опционы делятся на европейские и американские. По европейскому опциону его исполнение может быть произведено строго в дату экспирации. По американскому опциону, исполнение может быть произведено в любой день, с момента подписания опционного соглашения и вплоть до даты экспирации.

Рассмотрим структуру опциона CALL. Пусть цена базового актива на момент исполнения call-опциона в дату T составляет S_T. Тогда держатель получает доход по call-опциону в размере:

$$I_C = \max(S_T - y_c, 0) - z_c. \tag{4.3}$$

В структуре дохода I_T есть компонент, именуемый **внутренней премией** опциона, который составляет разницу между курсовой ценой базового актива и страйком.

Внутренняя премия по call-опциону положительна, если опцион находится «в деньгах», т.е. направление рынка угадано держателем верно, и курсовая цена лежит выше страйка. Вид дохода держателя по call-опциону представлен на рис. 4.1.

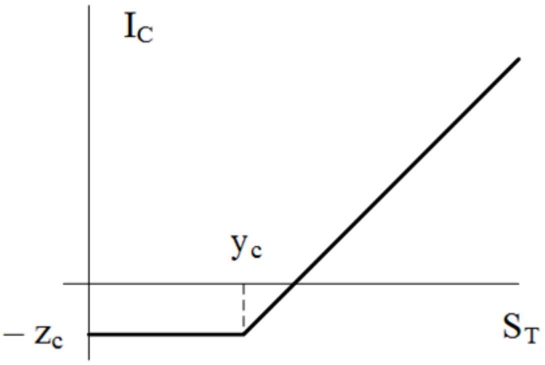


Рис. 4.1. Доход держателя по call-опциону

Теперь рассмотрим структуру опциона PUT.

Держатель получает доход по put-опциону в размере:

$$I_P = \max(y_p - S_T, 0) - z_p. \qquad (4.4)$$

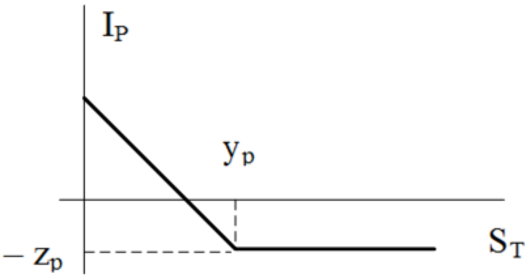


Рис. 4.2. Доход держателя по put-опциону

Внутренняя премия по put-опциону положительна, если опцион находится **«в деньгах»,** т.е. направление рынка угадано держателем верно, и курсовая цена лежит ниже страйка. Вид дохода держателя по put-опциону представлен на рис. 4.2.

Поскольку курсовая цена базового актива S является случайной величиной, то и доход по опциону является случайной величиной. Рассмотрим определение дохода и риска по опциону в двух парадигмах: вероятностной и нечётко-множественной.

4.3. Вероятностная модель опционного дохода и риска

Пусть S_T – случайная величина, распределённая по нормальному закону с плотностью распределения φ(s), где s – заранее предустановленный уровень курсовой цены базового актива. Получим на этом основании плотность распределения дохода по опциону, которую обозначим f(x), где x – заранее предустановленный уровень дохода.

Доказано **[3]**, что в случае call-опциона выполняется:

$$f_C(x) = \begin{cases} 0, x < -z_c \\ K \times \delta(x + z_c), x = -z_c \\ \varphi(x + y_c + z_c), x > -z_c \end{cases}, \qquad (4.5)$$

где К – вероятность события, что опцион окажется не «в деньгах»:

$$К = \Pr\{S_T < y_c\} = \int_{-\infty}^{y_c} \varphi(s)ds, \qquad (4.6)$$

а δ(*) – дельта-функция Дирака, имеющая вид:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (4.7)$$

На рис. 4.3 представлен примерный вид плотности вида (4.5).

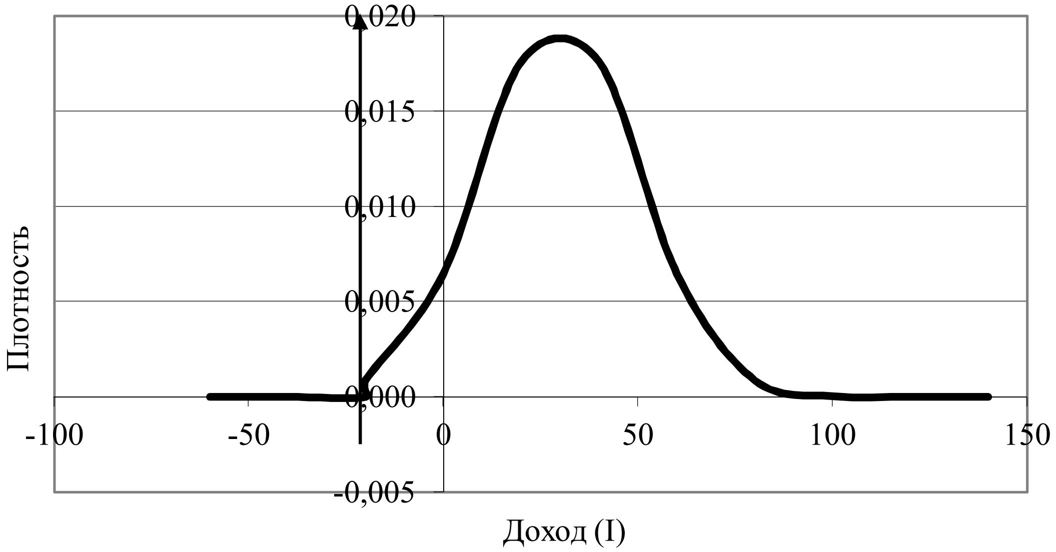


Рис. 4.3. Примерный вид плотности усеченного распределения дохода по опциону

Видно, что мы перешли от нормального распределения цен к усеченному нормальному распределению доходов, которое является бимодальным – а, следовательно, совершенно непохожим на вид классического нормального распределения.

Средняя величина дохода MI по call-опциону:

$$MI_C = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_C(x)dx \approx K*(-z_c) + (1-K)*(MS_T - y_c - z_c), \quad (4.8)$$

где $f_C(x)$ рассчитывается по (4.5), а MS_T – математическое ожидание курсовой цены S_T. Тогда среднеожидаемая доходность от инвестиций в опцион, в процентах годовых:

$$R_C = MI_C / z_c / T. \quad (4.9)$$

Также можно оценить риск инвестиций в опцион – как вероятность того, что положительного дохода по опциону не будет

$$RiskC = Pr\ \{S_T < y_c + z_c\} = \int_{-\infty}^{y_c + z_c} \varphi(s)ds\,. \quad (4.10)$$

В свою очередь, распределение дохода по put-опциону описывается функцией вида:

$$f_P(x) = \begin{cases} 0, x < -z_p \\ K \times \delta(-x - z_p), x = -z_p \\ \varphi(y_p - x - z_p), -z_p < x < y_p - z_p \\ 0, x \geq y_p - z_p \end{cases}, \quad (4.11)$$

где К – вероятность того, что put-опцион окажется не «в деньгах»

$$K = \Pr\{S_T > y_P\} = \int_{y_p}^{\infty} \varphi(s)ds \quad . \quad (4.12)$$

Плотность вида (4.11) – это усеченный с двух сторон нормальный закон плюс дельта-функция на границе усечения. Второе усечение возникает из-за того, что цена на базовый актив не может быть отрицательной.

Также справедливы соотношения для среднеожидаемого дохода, доходности и риска от инвестиций в put-опцион:

$$MI_P = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_P(x)dx \approx K*(-z_p) + (1-K)*(y_p - MS_T - z_p), (4.13)$$

$$R_P = MI_P / z_P / T, \quad (4.14)$$

$$RiskP = \Pr\{S_T > y_c + z_c\} = \int_{-\infty}^{y_c + z_c} \varphi(s)ds \, . \quad (4.15)$$

Пример 4.2 (call). В начале года инвестор приобретает за z_c = 10 ед. цены опцион call на базовый актив со стартовой ценой S_0 = 100 ед. Страйк опциона y_c = 100 ед., опцион американский, длительностью 1 год. Поскольку страйк совпадает со стартовой ценой, то покупаемый опцион является опционом «в деньгах». Инвестор ориентируется на следующие параметры доходности и риска базового актива: текущая доходность r = 30% годовых, СКО случайной величины текущей доходности σ = 20% годовых. Требуется определить среднеожидаемую доходность по инвестициям в опцион с расчётным сроком владения T = 0.5 года.

Решение. В пересчёте на финальную цену S_T это означает, что через время T = 0.5 лет базовый актив будет иметь нормальное распределение S_T с параметрами MS_T = 115 ед. и σ_S = 10 ед.

Определим вероятность К того, что опцион окажется не «в деньгах» по (4.6):

$$K = \int_{-\infty}^{y_c} \varphi(s)ds = F(100) = \text{НОРМРАСП } \{100;115;10;\text{ИСТИНА}\} = 0.067$$

А риск того, что положительного дохода по опциону не будет:

RiskC = НОРМРАСП {100+10; 115; 10; ИСТИНА} = 0.309

С позиций рационального инвестирования, риск непокрытых инвестиций в call-опцион является неприемлемым. Однако крайне высокая ожидаемая доходность делает такие инвестиции приемлемыми для агрессивных инвесторов:

$MI_C \approx 0.067*(-10) + 0.933 *(115-100-10) = -0.7 + 4.7 = 4$ ед.

$R_C = 4 / 10 / 0.5 = 80\%$ годовых.

Результаты наглядно показывают то, что опцион – это одновременно высокорисковый и высокодоходный инструмент. Высокая доходность достигается за счет левериджа: не вкладывая деньги в подлежащий актив, инвестор, тем не менее, получит по нему возможный доход и не будет участвовать в убытках. Другое дело, что обычно держатель опциона (как и райтер) балансирует на грани прибылей и убытков, ибо все ищут выигрыша, и никто не станет работать себе в убыток. Поэтому для call-опционов *в деньгах* **разница между среднеожидаемой ценой подлежащего актива и опционной премией обычно колеблется вокруг цены исполнения**. Это означает, что вложения в непокрытые опционы, с точки зрения риска, сопоставимы с игрой в орлянку.

4.4. Нечётко-множественная модель опционного дохода и риска

Если курсовую цену базового актива представить как треугольное нечёткое число S_T = (min, av, max) и применить соотношение (4.3) для опционного дохода, то доход держателя по опциону call – это усечённое слева треугольное число, относящееся к классу кусочно-линейных чисел (**числа BL-вида**, рис. 4.4).

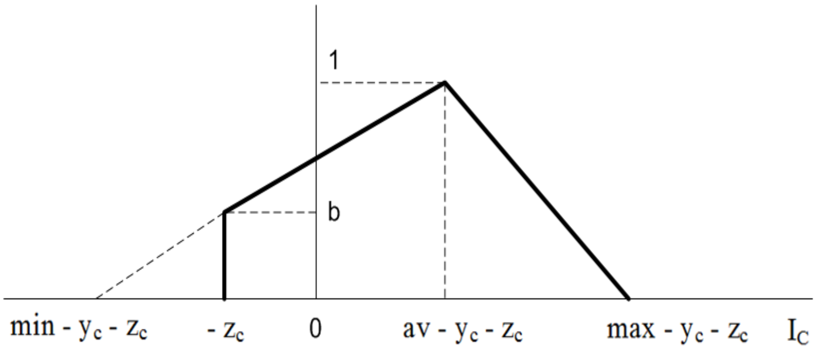


Рис. 4.4. Нечёткое число BL-вида дохода по call-опциону

Ординату точки усечения b можно определить по формуле

$$b = (y_c - \min) / (av - \min). \quad (4.16)$$

В свою очередь, доход по put-опциону – это усечённое нечёткое число вида рис. 4.5:

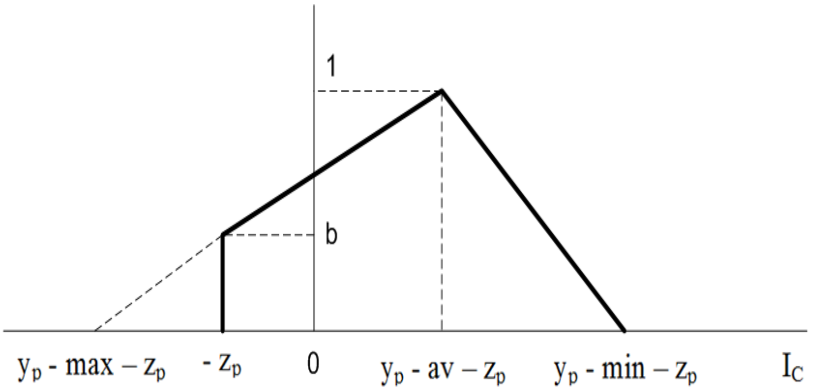


Рис. 4.5. Нечёткое число BL-вида дохода по put-опциону

В данном случае, ординату точки усечения b можно определить по формуле

$$b = (\max - av) / (\max - y_p). \quad (4.17)$$

Чтобы определить риск инвестирования в инструмент, чей доход представлен нечётким числом произвольного вида, необходимо описать это число набором сегментных интервалов, собранных с определённым уровнем дискретизации. Для практических задач бывает достаточно уровня дискретности $\Delta\alpha = 0.1$ (всего представлено 10 интервалов). Тогда каждый интервал на уровне α – это отрезок носителя $[I_{\alpha\min}, I_{\alpha\max}]$. Введём нормативное значение дохода L, на который нацелен держатель опциона, не рассчитывая получить меньше. Тогда выражение для риска:

$$\text{Risk} = \sum_{\alpha=0}^{1} \max\left(\frac{L-I_{\alpha min}}{I_{\alpha_{max}}-I_{\alpha_{min}}}, 0\right)/11. \qquad (4.18)$$

Пример 4.3 (call). В начале года держатель приобретает за $z_c = 10$ ед. цены опцион call на базовый актив со стартовой ценой $S_0 = 100$ ед. Страйк опциона $y_c = 100$ ед., опцион американский, длительностью 1 год. Поскольку страйк совпадает со стартовой ценой, то покупаемый опцион является опционом «в деньгах». Держатель ориентируется на нечётко-треугольное распределение цены базового актива на момент погашения через T = 0.5 лет: $S_T = (100, 115, 130)$ ед., т.е. рассчитывает на рыночный рост темпом 30% годовых. Какой риск инвестиций в опцион принимает на себя держатель?

Решение. Составим таблицу 4.1, содержащую значения опционного дохода I_C как набора интервалов принадлежности, в соответствии с уровнем принадлежности $\alpha = 0 \dots 1$. Реперные точки для построения нечёткого числа вида рис. 4.3: максимальный доход составляет 130-100-10 = 20 ед., среднеожидаемый доход 115-100-10 = 5 единиц, координаты точки усечения: абсцисса (-10) единиц, ордината 0, т.е. усечения на левом конце нет, и $I_C = (-10, 5, 20)$ ед. В качестве норматива дохода примем L=0 ед., т.е. держатель опциона считает безрисковым вложения, не приносящие убытков. В табл. 4.1 также занесём уровни локальных рисков, входящих слагаемыми в сумму (4.18), обозначив их Risk_α.

Табл. 4.1. Интервальное представление I_C

α	$I_{\alpha min}$	$I_{\alpha max}$	Risk_α.
0.1	-8.5	18.5	0.315
0.2	-7	17	0.292
0.3	-5.5	15.5	0.262
0.4	-4	14	0.222
0.5	-2.5	12.5	0.167
0.6	-1	11	0.083
0.7	0.5	9.5	0.000
0.8	2	8	0.000
0.9	3.5	6.5	0.000
1	5	5	0.000

Вычисления по формуле (4.18) дают Risk = 0.152. Точное значение риска, в соответствии с (2.23), равно 0.15 (погрешность в третьем знаке). Этот риск представляется пограничным, т.е. требует мероприятий по снижению. При допущении большего разброса по S_T (в предположении о возможном выходе цены вниз за страйк) риск инвестиций в непокрытый опцион становится недопустимым. Такое снижение цены предполагается возможным в модели предыдущего примера (левый хвост плотности распределения базового актива).

4.5. Форсирующее и хеджирующее влияние опционов на распределение доходности подлежащего актива

Назовём **сборкой** портфель, содержащий некоторое количество акций (базовый актив) и опционы к ним, причём количество опционных контрактов может не совпадать с количеством акционных лотов, на которые выписывается один опционный контракт. Если есть совпадение, то коэффициент покрытия акций опционами равен 1.

Проследим, что происходит при внедрении опционов и опционных комбинаций в сборку. Если в сборку добавляются опционы call, то это оказывает **форсирующее** воздействие на доход. В вероятностной модели сборки это вызывает эффект толстого правого хвоста, при этом максимум функции плотности распределения смещается влево, на размер опционной премии. В нечётко-множественной модели это провоцирует излом кусочно-линейного числа дохода и также смещение максимума числа влево на размер дохода. **Форсирование** – это создание возможностей в части сборки для удвоения дохода, в том случае, если направление рынка угадано верно. В свою очередь, внедрение put-опционов в сборку даёт эффект **хеджирования** – отсечение убытков.

Это сопровождается смещением максимума дохода влево на размер опционной премии, а также усечением левого конца вероятностного и нечётко-множественного распределений дохода. В 1-ом случае - усечённое нормальное распределение сборки, во 2-ом случае – кусочно-линейное нечёткое число BL-вида (рис. 4.6).

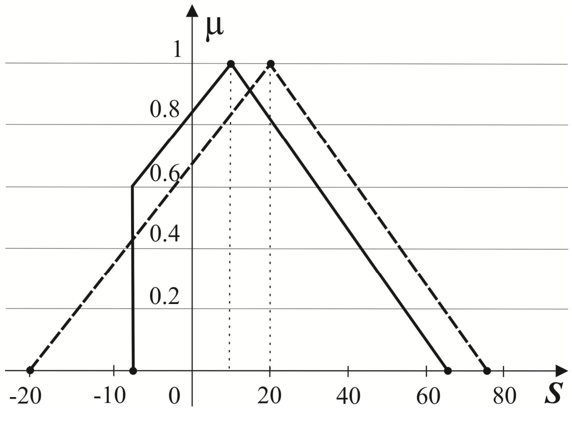


Рис. 4.6. Изменение распределения цены сборки, в сравнении с ценой базового актива (нечёткая модель)

Также доказано [3], что внедрение опционов существенно влияет на корреляцию компонентов портфеля, как в сторону увеличения, так и в сторону снижения, в зависимости от направленности опционов.

4.6. Оптимизация фондового портфеля, содержащего опционы

Как уже говорилось, внедрение опционов в фондовый портфель делает невозможным оптимизацию портфеля по Марковицу. Также надо добавить, что рынок опционов, как самостоятельный финансовый рынок, вносит свои коррективы в рыночную линию CML (см. параграф 3.3). Сборки с put-опционами, за счёт эффекта хеджирования, увеличивают вес безрискового капитала в структуре рынка. Наоборот, сборки с call-опционами увеличивают вес высокорискованных компонентов рынка. Рынок как бы раздирается на две половины, состоящей из очень надёжных и очень ненадёжных активов.

Всё сказанное делает применение классических схем оптимизации невозможными. В ход снова идут нечётко-множественные алгоритмы (см. параграф 3.4).

Перед оптимизацией портфель сегментируется на сборки, содержащие в своём составе как базовые активы, так и опционы. Если в сборке наблюдается избыточное покрытие, тогда опционы, создающие избыточное покрытие, сегментируются в отдельную самостоятельную группу. Для каждой сборки в портфеле и для группы опционов с избыточным покрытием выстраивается нечёткое число ожидаемого дохода I и, соответственно, нечёткое число ожидаемой доходности r, которое традиционно имеет BL-вид. Если каждый компонент портфеля имеет кусочно-линейную доходность, то и доходность портфеля в целом R – это число BL-вида. Задавшись нормативом L предельно низкой приемлемой доходности, мы можем оценить риск портфеля по формуле (4.18), восстановив сегментные интервалы нечёткого числа R и сравнив их с L, как это делается в примере 4.3.

Дальше – дело техники. Мы имеем двумерную точку в портфельном облаке, которую мы можем поднять на эффективную границу облака, перераспределив веса компонент в портфеле, в том числе пересмотрев политику покрытия активов опционами. Чтобы это сделать, необходимо применить градиентный метод, описанный в параграфе 3.4.

Надо отметить, что предлагаемый метод позволяет оптимизировать портфель с опционами любой направленности, находящимися как в длинных, так и в коротких позициях. Мы оставляем раскрытие этого тезиса за скобками настоящего пособия.

4.7. Опционные комбинации

С развитием финансового рынка, стратегии применения опционов на этих рынках становятся всё более и более изощрёнными. Это связано с тем, что участники рынка применяют не один, а несколько опционов одновременно, в рамках одного портфельного решения, причём могут одновременно оказываться не только держателями или райтерами опционов, но и совмещать эти длинные и короткие позиции в одном портфеле. В этом случае, мы имеем дело с применением опционных комбинаций. В таблице 4.2 приведены несколько простейших опционных комбинаций.

Табл. 4.2. Опционные комбинации

Наименование комбинации	**Структура комбинации**	**Особенность**
«Стеллаж» (рис. 4.7)	Long put + long call	Страйки двух опционов совпадают
«Удавка» (рис. 4.8)	Long put + long call	Страйк call больше страйка put
«Бычий спред» (рис. 4.9)	Long call + short call	Страйк short call больше страйка long call
«Медвежий спред» (рис. 4.10)	Long put + short put	Страйк short put меньше страйка long put

На рисунках 4.7 – 4.10, S – это цена базового актива на момент исполнения опционов, I – доходность держателя опционной комбинации.

Если в комбинации нет коротких позиций, то стратегия держателя в том, чтобы, за счёт увеличения объёма инвестиций, одновременно повысить меру вероятности (или возможности) того, что хотя бы один опцион из комбинации окажется «в деньгах». Тогда возникающий доход перекроет совокупную опционную премию, и держатель окажется в выигрыше, правда, со значительно меньшей доходностью.

Если же в комбинации есть короткие позиции, то таким образом держатель, неуверенный в правильном определении направления рынка, снимает с себя часть возможных потерь, покрывая свою длинную позицию короткой.

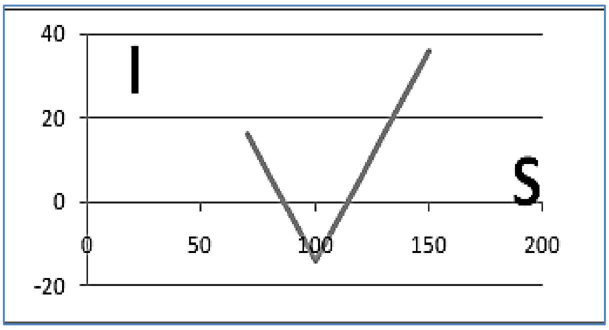


Рис. 4.7. Доход держателя опционной комбинации «стеллаж»

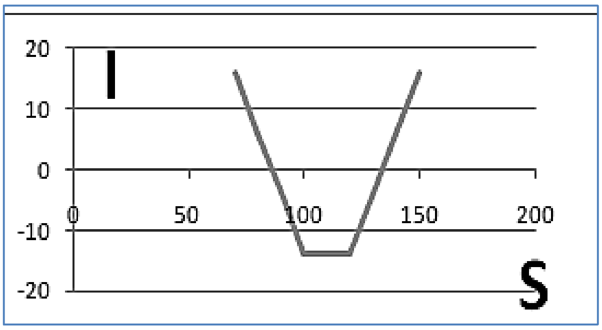


Рис. 4.8. Доход держателя опционной комбинации «удавка»

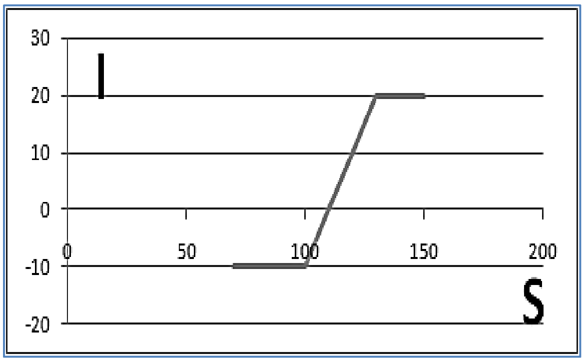


Рис. 4.9. Доход держателя опционной комбинации «бычий спред»

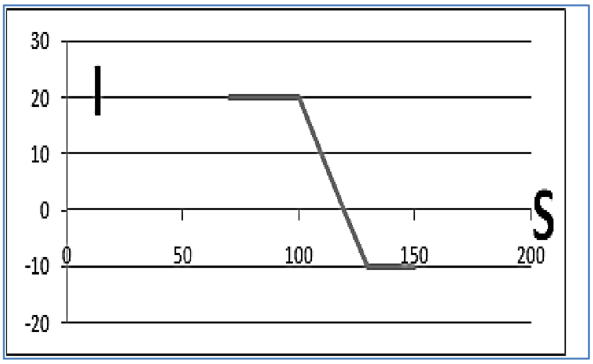


Рис. 4.10. Доход держателя опционной комбинации «медвежий спред»

Например, в случае «бычьего спреда» опцион в короткой позиции обладает меньшим размером премии, чем опцион в длинной позиции, поскольку вероятность исполнения «короткого» опциона значительно ниже «длинного» опциона. Значит, если держатель угадал направление рынка, он делится частью своего дохода с владельцами «покрывающего» опциона. Если же направление рынка не угадано, то объём инвестиций в опционную премию (равно как и размер убытков) оказывается меньше.

С точки зрения теории оптимизации по Парето, инвестирование в опционные комбинации создаёт в портфеле новые недоминируемые альтернативы. Накопление длинных позиций по опционам одновременно снижает доходность и риск инвестиций в комбинации, за счёт удорожания суммарной опционной премии. Такой же эффект возникает и при накоплении коротких позиций, но уже за счёт того, что уменьшается размер возможного опционного дохода, даже если опционная комбинация попадает «в деньги». Во всех случаях, доходность и риск инвестиций в комбинации надо анализировать отдельно, используя теоретический материал параграфа 4.4 настоящего учебного пособия.

Если опционные комбинации сформированы в коротких позициях, то это говорит о потенциальной возможности неограниченных убытков. В таком положении оказался Ник Лисон, который в своё время разорил банк «Barings», в котором служил трейдером и применял короткие «стеллажи». Подробно он сам изложил эту историю в [16]. Она трагична.

Выводы по разделу 4

В разделе продемонстрированы механизмы использования производных ценных бумаг (деривативов) в фондовых портфелях. Рассмотрена суть фьючерсов и финансовых опционов. Показано, что заведение деривативов в фондовых портфель деформирует исходные вероятностные и возможностные распределения базовых активов портфеля, и задача оптимизации такого портфеля существенно усложняется. Показан механизм извлечения дохода от использования финансовых опционов PUT и CALL, оценивается риск инвестирования в опционы, в сборки «опцион + актив» и в опционные комбинации, с применением вероятностной и нечётко-множественной постановок задачи. Существенная часть научных результатов, изложенных в данном разделе, принадлежит авторам пособия.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое фьючерс, базовый актив?
2. Что такое вариационная маржа, на основе каких цен – фьючерсных или спотовых – она определяется?
3. Почему доход по опциону call описывается усечённым нормальным вероятностным распределением? Почему, в случае опциона put, мы имеем двойное усечение распределения?
4. Что такое нечёткое число BL-вида?
5. Какой приём используется для оценки риска инвестиций, если доход – нечёткое число произвольной формы?
6. Какое влияние опционов на портфель считается форсирующим, а какое – хеджирующим?
7. Что такое коэффициент покрытия активов опционами? Если он равен нулю, то что это означает?

8. Можно ли оптимизировать фондовый портфель, состоящий из одних опционов?
9. Можно ли оптимизировать портфель, содержащий опционы в коротких позициях?
10. Какие опционные комбинации вы можете назвать, в чём их существенные отличия?

РАЗДЕЛ 5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕНДЕНЦИЙ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

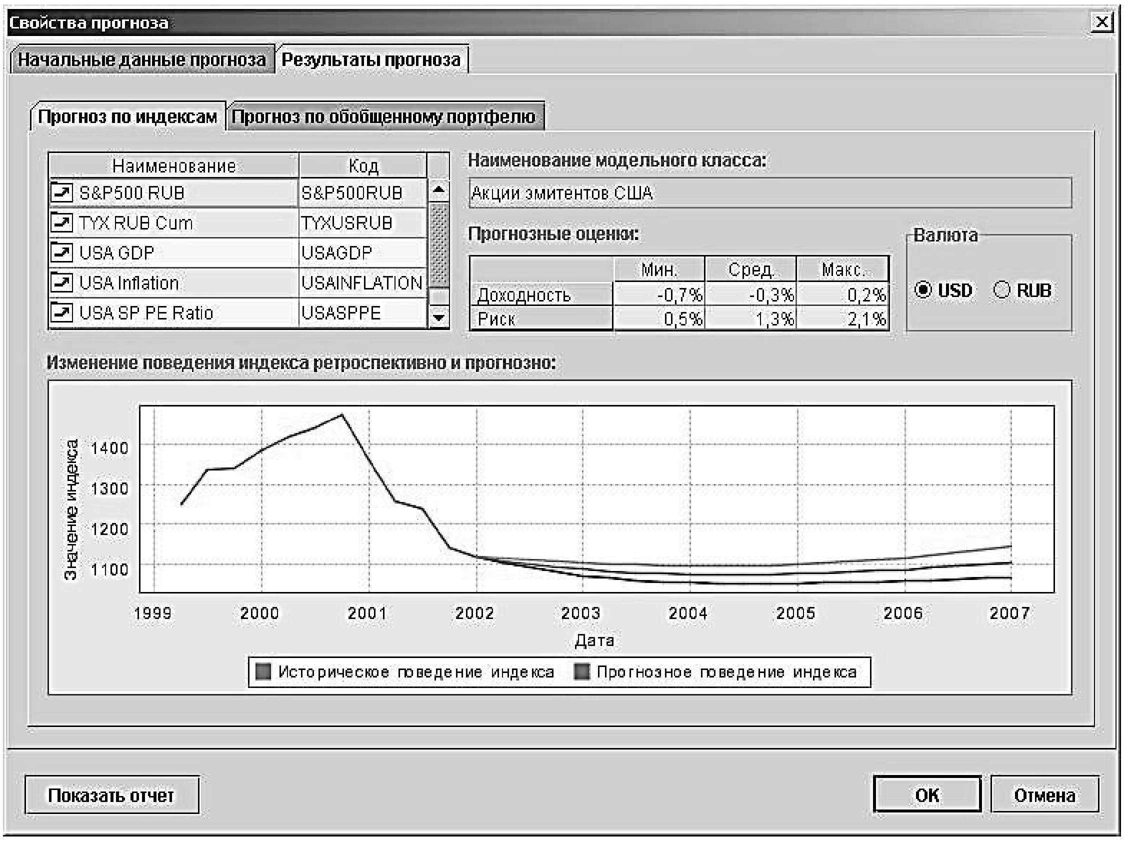
Существуют два основных подхода к оценке перспектив рынка – технический и фундаментальный (см. раздел 1). Если речь идёт о прогнозировании рыночных тенденций на короткий срок вперёд (максимум на неделю), то методы технического анализа могут принести пользу. За границами этого временного промежутка они не работают. Соответственно, технический анализ – это удел и любимое занятие трейдеров спекулятивной направленности. Для инвестиционных аналитиков, анализирующих рынок «вдолгую», только фундаментальные подходы могут дать исследователю основания для содержательных выводов. Поэтому мы на них и сосредотачиваемся в ходе изложения настоящего пособия. Сделаем ещё несколько замечаний в рамках фундаментальной парадигмы.

5.1. Применение нечётких функций для прогнозирования рыночных трендов

Введём понятие **нечёткой функции**, где аргумент – это время, а само значение функции, отвечающее такому аргументу – это нечёткое число произвольного вида. Если вид числа – треугольный, то можно говорить о «трёххвостке» - совокупности трёх рыночных трендов, каждый из которых отвечает за свой сценарий развития будущих событий: пессимистический (min), среднеожидаемый (av) и оптимистический (max). Будем называть такие функции **треугольно-нечёткими**. Запись:

$$Z(t) = \{Z_{min}(t), Z_{av}(t), Z_{max}(t)\}. \qquad (5.1)$$

Сегодня нечёткие функции широко применяются при планировании на макроэкономическом и микроэкономическом уровнях. В качестве примера такого использования можно привести блок прогнозирования фондовых индексов в составе программного решения Portfolio Optimization System от Siemens Business Services Russia (см. рис. 5.1). Один из авторов настоящего пособия (А. Недосекин) принимал участие в создании этого программного решения, которое потом было приобретено Пенсионным фондом РФ.



Наименование	Код
S&P500 RUB	S&P500RUB
TYX RUB Cum	TYXUSRUB
USA GDP	USAGDP
USA Inflation	USAINFLATION
USA SP PE Ratio	USASPPE

Наименование модельного класса: Акции змитентов США

Прогнозные оценки:

	Мин.	Сред.	Макс.
Доходность	-0,7%	-0,3%	0,2%
Риск	0,5%	1,3%	2,1%

Валюта: ● USD ○ RUB

Рис. 5.1. Прогнозирование фондового индекса в программе «Portfolio Optimization System»

5.2. Определение точек перелома тенденций (ретроспектива и прогноз)

Оптимизация модельного фондового портфеля должна осуществляться на основе научных прогнозов по рыночным индексам. Бесполезно оптимизировать портфель на исторических данных, потому что их значение для прогноза ограничено и непрерывно падает со временем. Прогнозирование фондовых индексов – это задача, которая перестает быть научной при том условии, когда к теории прогнозирования предъявляются завышенные требования предсказания вполне точных значений тех или иных параметров в будущем. Современная теория прогнозирования фондовых индексов базируется на том, что предсказанию подлежат не сами индексы, **а их рациональные тенденции,** обусловленные рациональным поведением коллективного инвестора в фондовые активы.

Существует целый класс теорий прогнозирования, базирующихся на историческом анализе данных. Ни одна из этих теорий не контролирует состоятельность данных, поступающих на вход соответствующих методов.

Однако в том случае, когда между историческими данными и будущим лежит парадигмальный разрыв, то соответствующая предыстория индексов существенно обесценивается, а базирующиеся на использовании этой статистики методы начинают давать ошибочные прогнозы.

Следовательно, перед наукой прогнозирования тенденций фондового рынка (если она признает себя таковой) встает задача смены основ, на которой базируется эта наука. И возможной новой основой для современной теории прогнозирования как раз и может стать теория рационального инвестиционного выбора, в основе которой лежит **принцип инвестиционного равновесия**, т.е. равноэффективности инвестиций в различные рыночные сегменты. Если равновесие нарушается, то начинается масштабный перелив капитала. Одни индексы начинают бурно расти, другие – столь же бурно падать. Поэтому задача определения точек потери равновесия (точек излома тренда) – необычайно актуальна.

Инвестиционное равновесие – это основа основ рационального инвестиционного выбора. Этот принцип берет свое начало в математической теории игр (в частности, равновесной игрой является игра с нулевой суммой. Принцип равновесия является аналогом закона сохранения энергии и вещества. Если капиталу где-то плохо лежится, он потечет туда, где ему будет лучше. Если капиталу будет плохо везде в пределах заданной своей формы, он сменит форму.

Например, кризис американского фондового рынкам 2000 – 2001 годов – это классический кризис переоценки, сопровождающийся поиском и достижением нового уровня рыночного равновесия. На исторических данных можно проследить, что капиталу было неспокойно в перегретых акциях, и он массово сбежал оттуда. Пытался пристроиться в облигации, но там его, по большому счету, никто не ждал. Условия государственных займов неинтересны, условия корпоративных займов ненадежны (все эти выводы – в пределах сложившейся конъюнктуры фондового рынка США). И что делать капиталу? Он продолжил свое бегство - либо за границу, мобилизуясь на счетах в европейских банках, при этом меняя валюту, либо понемногу оседал в менее ликвидных формах (драгметаллы, антиквариат, недвижимость и т. д). Надо думать, что и современное китайское экономическое чудо во многом обязано тому, что капитал побежал за пределы США, причём уже не в фондовые активы, а в прямые инвестиции на развивающихся рынках.

Равновесие – это равнопредпочтительность. С точки зрения инвестиционного выбора это – безразличие. Модель CAPM показывает, что эффективная граница обобщенного инвестиционного портфеля имеет вид, близкий к линейному. Ни в одной точке границы не достигается экономическое преимущество (дополнительный выигрыш) по критерию Шарпа. Нет экономического преимущества – следовательно, в игре с рынком не выигрывает никто (сумма игры нулевая). Если инвестор вкладывается в перегретые акции, он проигрывает. Если в недооцененные – выигрывает. Но, когда все игроки действуют рационально, то дополнительного выигрыша нет ни у кого, потому что все игроки одинаково эффективно распределяют базовый источник дохода – валовый внутренний продукт страны, на уровне отраслей и корпораций, куда идет инвестирование. Соответственно, рациональному инвестору всё равно, как вкладываться на рациональном рынке. И, при отсутствии дополнительных соображений, он просто 50% размещает в акциях, а 50% - в облигациях, позиционируя свой инвестиционный выбор как промежуточный (под дополнительными соображениями здесь понимается, например, пожилой возраст инвестора, склоняющий его быть более консервативным). Назовем выбор 50:50 контрольной портфельной точкой.

Еще важные приложения принципа равновесия. Монотонный портфель равновесен, потому что он построен по золотому правилу инвестирования, а само это правило интерпретирует принцип равновесия как принцип разумной диверсификации. Безотносительно типа своего выбора, разумный инвестор «никогда не кладет все яйца в одну корзину». Как бы беззаветно он не любил рисковать, у него должны быть отложены средства на черный день. И наоборот: пребывая в одних облигациях, богатства не наживешь и на пенсию не заработаешь, поэтому приходится рисковать. А факт неполной корреляции индексов акций и облигаций свидетельствует о взаимном элиминировании рисков этих индексов в диверсифицированном портфеле.

Принцип равновесия хорошо иллюстрирует тренд фундаментального фактора PE (price-to-earnings ratio) по американским акциям [25], рис. 5.2.

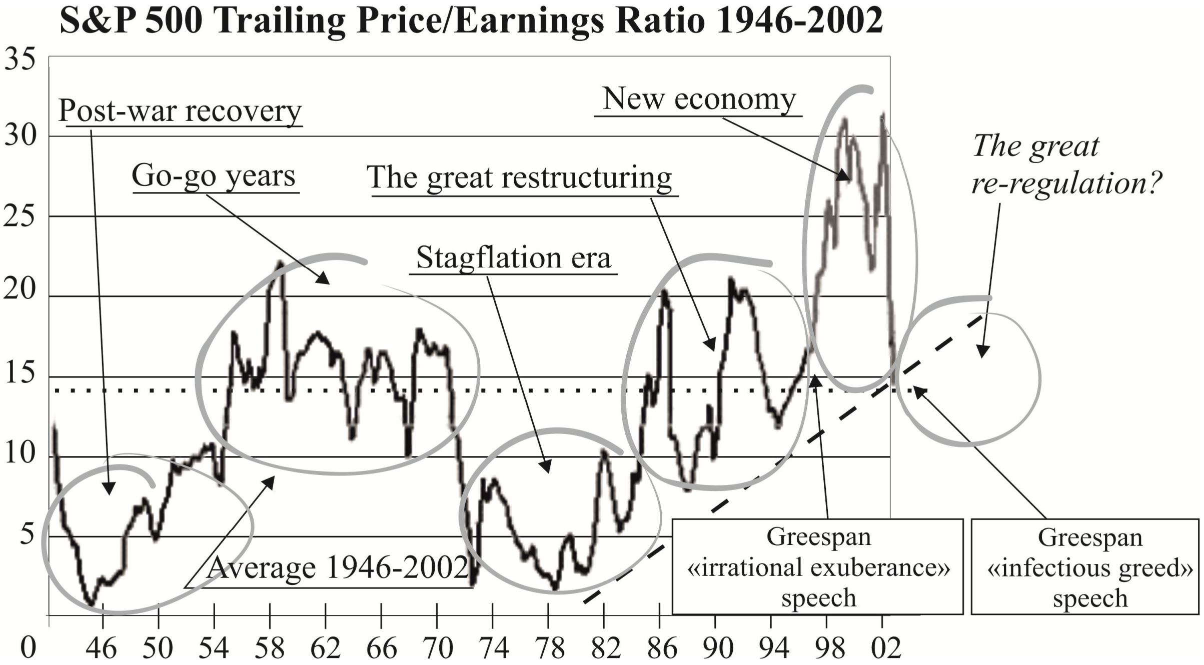


Рис. 5.2. Рентабельность капитала в США с 1946 по 2002 г (по фактору PE Ratio)

Видно, что линия рыночного равновесия PE пролегает на уровне PE=15 лет. Отклонения от этого уровня (смещение в инвестиционном равновесии) порождают рыночное напряжение и рост рисков. Так, выявленная недооценённость на рынках обещает «ралли» (взлёт цен), который и наблюдался с 1995 по 2001 год. При этом деньги перетекали на рынок акций с сопряжённых рынков (с тех же рынков облигаций и банковских депозитов). Бывший директор Федеральной Резервной Системы США Алан Гринспен так высказывался в 1996 году по этому поводу в своей программной речи: «*Ясно, что длительная низкая инфляция подразумевает меньшую неопределенность относительно будущего, и меньшие премии за риск вызывают более высокие цены акций и иных доходных активов. Мы можем видеть это в обратном отношении PE Ratio к уровню инфляции, что наблюдалось в прошлом*». Здесь есть явный прогноз будущего рыночного «пузыря», который надувается вследствие потери инвестиционного равновесия - и неизбежно должен лопнуть. Далее Гринспен говорит, продолжая начатое выше: «*Но откуда мы знаем, когда иррационально ведущее себя избыточное богатство чрезмерно взинтит цены на активы, не настанет ли тогда черед неожиданным и продолжительным финансовым стрессам, как это имеет место в Японии все последнее десятилетие? И как мы учтем эти факторы в монетарной политике? Нас - правительственных банкиров – не должна касаться ситуация, если коллапс финансовых рынков не* *угрожает ослаблению реальной экономики, продукции, рабочим местам и ценовой стабильности*». Многие усмотрели в этом высказывании Гриспена пророчество, и, по сути дела, это так и есть. Гринспен указывает на то, что существует море «шальных денег», которое не хочет считаться с макроэкономикой, и именно эти деньги, перегревая фондовые ценности, создают инвестиционный диспаритет.

Можно ввести простой оценочный показатель диспаритета фондовых инвестиций, который получается по формуле:

$$A\_N\ Score\ (t) = I(t) * PE\ Ratio\ (t), \qquad (5.2)$$

где I(t) – уровень инфляции в долевых единицах. На рис. 5.2. приведен уровень диспаритета по рынку США в 1990-2000 г.г.

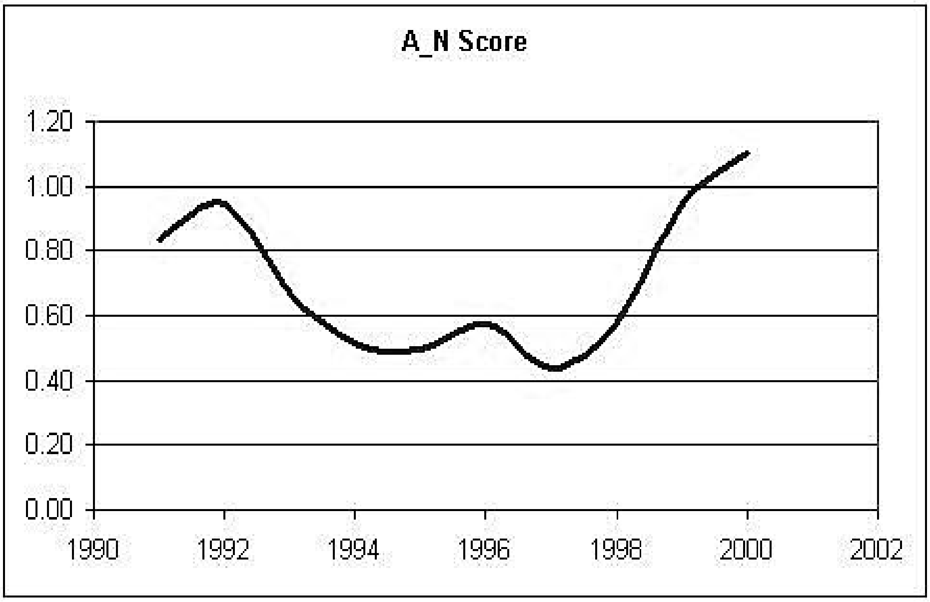


Рис. 5.2. Показатель инвестиционного диспаритета (США)

Из анализа исторических данных видно, что позитивный диспаритет достигается, когда A_N Score (t) < 0.5 (это ситуация 1994 – 1997 г.г., когда PE Ratio колеблется в диапазоне от 17 до 22 при инфляции 2.5-3% годовых). Ясно, что облигации неинтересны, а рентабельность капитала на уровне 5% годовых (плюс ожидаемый курсовой рост) не могут никого оставить равнодушным. Ждут притока капиталов, роста, и рост наступает. При этом «ралли» (т.е. устойчивая «бычья» игра) сохраняет волатильность индекса акций на уровне «до подъема».

Равновесие достигается при 0.6 < A_N Score (t) < 0.7 ((это ситуация 1994 – 1997 г.г. и 1998 – 1999 г.г., когда PE Ratio колеблется в диапазоне от

24 до 28 при инфляции 2.5-3.5% годовых). А негативный диспаритет мы наблюдаем при A_N Score (t) > 0.7 (1991 – 1992, 2000 – 2001 г.г., когда PE Ratio достигает и превышает 30, а инфляция зашкаливает за 5-6% годовых). Перестают быть интересны акции, начинают играть облигации; однако сама инфляция повышает системный риск фондового рынка, его ненадежность. Ждут оттока капиталов, спада, и спад настает (при этом устойчивая «медвежья» игра возвращает волатильность индекса на уровень значений «до подъема»). На рис. 5.3 видно, как по мере нарастания негативного диспаритета по тенденции растет и курсовая волатильность индекса акций.

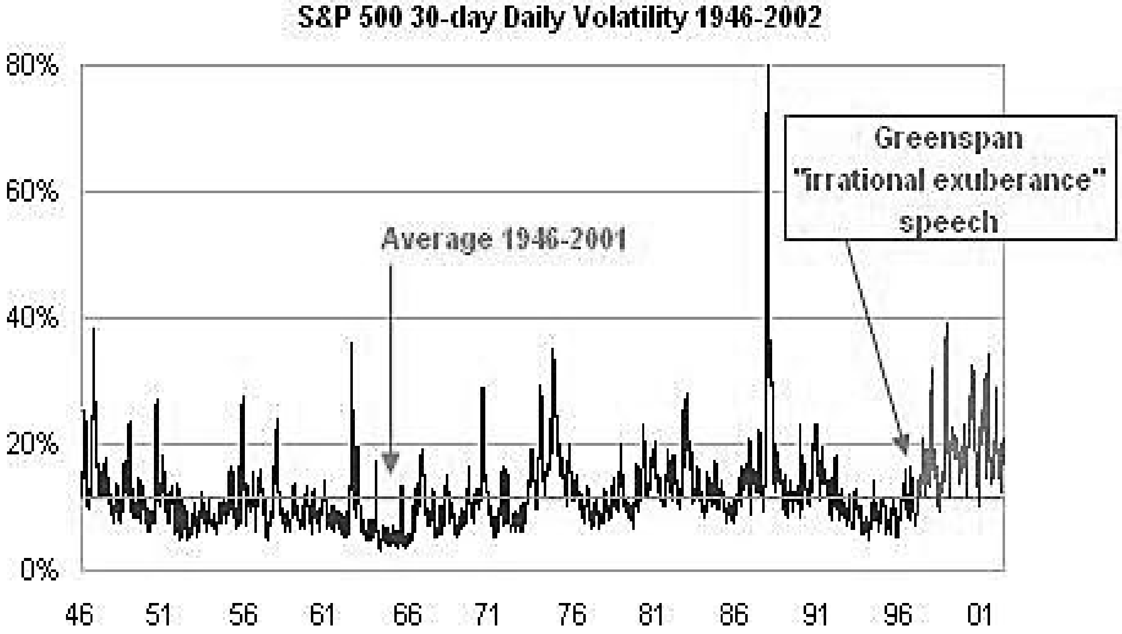


Рис. 5.3. Рост курсовой волатильности индекса акций (США)

Классифицируем тенденции, возникающие в ходе инвестиционного выбора. С точки зрения движения капитала, можно вычленить:

- *призывную* тенденцию (когда капитал отвлекается из других форм и инвестируется в фондовые активы);
- *выжидательную* тенденцию (когда прилив капитала останавливается, но отлива из фондовых активов еще нет);
- *отзывную* тенденцию (когда капитал перетекает с фондового рынка в другие формы).

С точки зрения портфельного выбора, можно вычленить:

- *агрессивную* тенденцию (когда капитал предпочитает акции облигациям и иным своим формам);

- *промежуточную* тенденцию (когда капитал ищет инвестиционного равновесия между акциями и облигациями);
- *консервативную* тенденцию (когда капитал предпочитает акции облигациям и иным своим формам).

На декартовом произведении вышеизложенных классификаций образуются комбинированные тенденции: выжидательно-агрессивная, призывно-консервативная и т.д. В условиях сохранения инвестиционного баланса перетоки между рыночными классами активов незначительны, на фоне накопленных инвестированных объёмов. Но однажды инвестиционное равновесие теряется, и рынки приходят в движение. С точки зрения теории катастроф, можно высказаться в том смысле, что рынки находятся перед катастрофой в точке бифуркации, и даже незначительное событие (например, негативная рыночная новость) может спровоцировать «обвал в горах», с отливкой накопленного неравновесия в новую рыночную парадигму.

Заключая, можно сказать, что точка перелома близка, когда на рынке накоплен критический объём неравновесных состояний, а уровень инвестиционного диспаритета критически высок. Тогда катастрофа – не за горами.

5.3. Связь между тенденциями финансового рынка и макроэкономическими факторами

Полноценный прогноз финансовых рынков никогда не является самодостаточным и изолированным, он всегда берёт во внимание тенденции и статусы, сложившиеся на данный момент в мировой и региональной экономике. В каком-то смысле, тенденции на финансовых рынках всегда запаздывают относительно событий в реальном секторе.

Рассмотрим в качестве примера две ситуации, сложившиеся в мировой нефтегазовой отрасли. Например, 70-е годы прошлого столетия характеризуются чрезвычайно высоким уровнем напряжённости в Персидском заливе. Сжатие добычи в этом регионе вызывало резкий рост мировых цен на энергоносители. Если бы на тот момент в СССР был фондовый рынок, то можно было бы ожидать на нём бурного долгосрочного «ралли». Однако потом ситуация разрешилась, цены вернулись на прежние низкие уровни, и этот ценовой шок послужил одной из главных причин «перестройки» и развала СССР в 1991 году.

Сегодня аналогичным мировым вызовом является так называемая «сланцевая революция», которая развивается в условиях растущей добычи сланцевого газа в США. По прогнозам аналитиков, в 2020 году США перестанет экспортировать энергоносители извне, оставаясь в пределах собственного регионального топливно-энергетического баланса. Возросший объём предложения энергоресурсов вызовет снижение цен на них; цены нефти и газа – строго коррелированны, поэтому они будут падать одновременно. Это, в свою очередь, приведёт к снижению выручки добывающих компаний, к сжатию натуральных объёмов добычи, к убыткам. В таком состоянии нефтегазовый комплекс РФ находился все 90-е годы прошлого века.

Снижение прибыльности в нефтегазовом секторе неминуемо вызовет снижение цен на акции соответствующих эмитентов. Собственно, это уже и происходит; цена акций «Газпрома» падает третий год подряд, резко возрастает инвестиционная привлекательность этих активов, но давно ожидаемого ценового перелома не наблюдается. Возможно, он уже и не наступит, и падение продолжится; вероятность этого сценария растёт.

Нефтегазовый сектор – это инвестиционная витрина России; можно сказать, что корреляция фондового индекса РТС и цены на нефть – близка к полной положительной. Поэтому если капитализация нефтегазового сектора начнёт полноценное снижение, то никакие успехи в других отраслях не будут в состоянии переломить тенденцию падения уровне РТС. А это уже – прогноз, имеющий не отраслевой только лишь, но и региональный, страновый характер. В качестве ещё одного неприятного следствия этой тенденции можно назвать рост рисков России как объекта для привлечения прямых инвестиций. Отток капитала с этих рынков, уже вполне существенный, будет только нарастать, если не будут приняты меры по наращиванию собственных внутренних инвестиционных источников.

Наоборот, улучшение энергетического баланса в США вызовет масштабное рыночное ралли, с одновременным снижением отраслевых и страновых рисков. По традиции, это ралли вызовет надувание фондового пузыря в соответствующих отраслевых сегментах. Затем пузырь лопнет, как это водится, но созданные под его покровом реальные экономические ценности (фонды, товары, услуги) будут продолжать служить экономике и населению страны, где они были созданы. Для России здесь урок в том, что времена младенческого капитализма здесь прошли, и надо всерьёз задуматься над стратегическом планированием, целеполаганием, снижать зависимость от нефтегазового сектора. Об этом говорят очень много и очень давно, но воплощаться это будет только тогда, когда опасность очередной «перестройки» станет неотвратимой.

Выводы по разделу 5

Раздел посвящён основам прогнозирования тенденций финансовых рынков, с позиций фундаментального анализа. Освящается накопленный опыт прогнозирования индексов в рамках работ над системой портфельной оптимизации для Пенсионного Фонда РФ. Анализируется опыт парадигмального излома тенденций фондового рынка, на примере обвала американского рынка «hi-tech» в 2000-2001 годах. Предлагается простой алгоритм оценки ценового диспаритета (переоценённости или недооценённости финансового рынка), с рассмотрением на примере фондового рынка США.

Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют подходы к оценке перспектив рынка?
2. Что такое нечёткая функция?
3. Можно ли оптимизировать портфель на основе исторических данных?
4. Что понимается под принципом инвестиционного равновесия?
5. Для чего используется простой оценочный показатель диспаритета фондовых инвестиций?
6. Перечислите тенденции, возникающие в ходе инвестиционного выбора с точки зрения движения капитала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ЧАСТИ 2 ПОСОБИЯ

Во второй части пособия рассмотрены финансовые решения, совершающиеся на макроэкономическом уровне, в порядке инвестиций в базовые и производные ценные бумаги. Поскольку эти решения совершаются в условиях высокого уровня рыночной неопределённости, анализ проводится с применением вероятностных и нечётко-множественных моделей, которые эту неопределённость пытаются количественно оценить. В конечном счёте, это служит обоснованием для рационального инвестиционного выбора в двумерном поле «риск решения – ожидаемый доход от решения».

В изложение не попало достаточно большое количество теоретических результатов, которые обладают высоким уровнем математической сложности. В частности, не рассматривалась теория Блэка-Шоулза оценки стоимости европейских опционов. Отчасти исключение этого вопроса из содержания пособия продиктовано и тем, что модель винеровского процесса, лежащая в основе теории Блэка-Шоулза, не всегда адекватна. В целом, идёт постепенное перемещение внимание от вероятностной парадигмы моделирования к нечётко-множественной парадигме. Этот общенаучный тренд здесь поддержан, в этом плане пособие звучит современно и актуально.

Все излагаемые модели и методы могут быть реализованы на базе табличного процессора Excel (или аналогичного табличного процессора), что даёт широкое поле для экспериментов в рамках заложенных в курс лабораторных работ. Оптимизационные задачи везде в курсе решаются с помощью градиентного метода, который абсолютно нечувствителен к выбору критериев оптимизации и их количества. Опыт проведения лабораторных работ показывает, что студенты находят эффективную границу портфельного множества из четырёх активов не более чем за полчаса-час, проходя полтора десятка итераций. Пока они строят границу, они, наконец, понимают, что же такое оптимизация по Марковицу. Это позволяет им провести аналогичную оптимизацию и в нечёткой постановке, за примерно такой же срок.

Все примеры, здесь изложенные, являются простыми и могут быть воспроизведены «руками», в Excel. Но настоящие портфели не содержат 3-4 актива, там их может быть до сотни, причём активы сегментированы по двум уровням, в рамках модельных и реальных сегментов. Существуют декларативные ограничения на размер модельных классов. В этих реальных условиях задача перестаёт решаться средствами Excel, требуются специализированные программные решения, которые нужно вводить в образовательный процесс. Для этого их сначала нужно приобрести у правообладателей.

Анализ деривативов – это вообще тема отдельного изучения, в рамках которой создано довольно много методов и программных средств. В данном пособии мы коснулись её лишь отчасти. Внедрение специализированных методов и программ, настроенных на анализ деривативов, требует совершенно иного уровня математической подготовки, которым сегодня студенты, даже обучаясь в университете, к сожалению, похвастаться не могут. Бесполезно обсуждать проблемы «толстых хвостов» специализированных распределений, если даже при усвоении нормального закона распределения у студентов возникают трудности…

Большое количество вопросов, обозначенных в данном курсе, осталось нераскрытыми до конца, недосказанными. Самостоятельная работа студентов здесь заключается в том, чтобы познакомиться с первоисточниками, изложенными в библиографическом перечне, к которым идёт отсылка по ходу изложения. Также целесообразно, чтобы студенты в условиях самоподготовки генерировали самостоятельные расчётные кейсы в Excel, с включением в них реальной статистики по ценным бумагам, на российском и американском материале.

Дисциплина «Анализ и моделирование финансовых рынков» должна углублять свою связь с микро- и с мезоуровнем, на которых располагаются отдельные эмитенты ценных бумаг и отраслевые сегменты. Мы продемонстрировали такой стык в первой части пособия, на примере оценки стоимости рациональной (справедливой) стоимости бизнеса и связи этой оценки с рыночной стоимостью, с определением недооценённости (переоценённости) актива. Следующий шаг – более глубокое исследование российской отраслевой специфики, с оценкой и нормированием ключевых факторов, влияющих на стоимость бизнеса и на его рыночную оценку. Такое развитие дисциплины позволит сместить акцент с анализа предпочтений внешнего рыночного инвестора на исследование предпочтений эмитента, в части выработки им стратегии выхода на финансовые рынки, с привлечением капитала различных типов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Бочаров, В.В. Инвестиции: учебник для вузов / В.В. Бочаров. - 2-е изд. СПб.: Питер, 2009.
2. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций / А.О. Недосекин - СПб: Сезам - 2002.
3. Недосекин А.О. Фондовый менеджмент в расплывчатых условиях/А.О. Недосекин - СПб: Сезам - 2003.
4. Николаева И.П. Рынок ценных бумаг: Учебник / И.П. Николаева - М:, ЮНИТИ - 2010.
5. Окороков Д.К., Белова Е.В. Технический анализ финансовых рынков: Учебное пособие / Д.К. Окороков, Е.В. Белова - М: Инфа-М - 2010.
6. Финансы: Учебник / Под ред. В. В. Ковалева - М: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004.
7. Финансы и кредит: Учебник/Под ред. проф. М. В. Романовского, проф. Г. Н. Белоглазовой. - М: Высшее образование, 2006.
8. Фондовый рынок: Учебное пособие / под ред. Берзона Н.И. Изд.-4-е, перер. - М: Вита-Пресс - 2009.
9. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции: Университетский учебник/У.Ф. Шарп, Г.Дж. Александер, Дж.В. Бэйли - М: Инфа-М - 2012.

Дополнительная литература:

10. Баффет М., Кларк Д. Инвестиционный портфель Уоррена Баффета/М. Баффет, Д. Кларк - М: Попурри - 2012.
11. Борискин В.В. Гармонический волновой анализ финансовых рынков /В.В. Борискин – М.: SmartBook, 2008.

12. Буренин А.Н. Хеджирование фьючерсными контрактами Фондовой биржи РТС / А.Н. Буренин М: Научно-техническое общество им. академика С.И. Вавилова - 2008.
13. Виленчик И. Графический анализ финансовых рынков/И. Виленчик - М: АДМИРАЛ МАРКЕТС - 2010.
14. Возный Д.В. Код Эллиотта: волновой анализ рынка FOREX, изд. 3-е/Д.В. Возный - М: SmartBook - 2011.
15. Евстигнеев В.Р. Прогнозирование доходности на рынке акций/В.Р. Евстигнеев - М: Маросейка - 2009.
16. Лисон Н. Как я обанкротил «Бэрингз». Признания трейдера-мошенника / Н. Лисон - М:Кейс - 2011.
17. Моррис Г.Л. Японские свечи: Метод анализа акций и фьючерсов, проверенный временем изд.-6-е / Г.Л. Моррис - М: Альпина Паблишер - 2012.
18. Мэрфи Дж.Дж. Технический анализ фьючерсных рынков: Теория и практика / Дж.Дж. Мэрфи - М: Альпина Паблишерз. - 2011.
19. Недосекин А.О. Монотонные бизнес-портфели и их оптимизация // Банки и риски, 2005, №1.
20. Недосекин А.О. Оптимизация фондового портфеля, содержащего call-опционы // Банки и риски, 2005, №1.
21. Недосекин А.О. Оптимизация фондового портфеля, содержащего put-опционы // Банки и риски, 2005, №1.
22. Недосекин А.О., Бессонов Д.В. Корреляционная матрица и её роль в оптимизации фондового портфеля (2002) // http://sedok.narod.ru/s_files/Art_16_2002.zip .
23. Сигел Д. Фьючерсные рынки: Портфельные стратегии, управление рисками и арбитраж / Д. Сигел - М: Альпина Паблишерз - 2012.

Интернет - источники:

24. Инвестиционный калькулятор для оценки рисков. Режим доступа: http://sedok.narod.ru/inv_risk_calc.html
25. Персональная страница Роберта Шиллера. Данные по PE фондового рынка США. Режим доступа: http://www.econ.yale.edu/~shiller/
26. Портал американского фондового рынка. Режим доступа: http://finance.yahoo.com/
27. Портал российского фондового рынка РБК. Режим доступа: http://quote.rbc.ru
28. Технический анализ. Режим доступа: http://forex-investor.net/tekhnicheskij-analiz.html

ГЛОССАРИЙ ЧАСТИ 2

Агрессивный инвестор – такой, для которого ожидаемая доходность инвестиций является наиболее значимым критерием, а риск инвестиций выступает в качестве слабого ограничения.

Беспоставочный инструмент – фьючерс или опцион, в рамках которых не предполагается поставка базисного актива по сделке, а производится оценка и выплата полученного в рамках инструмента дохода.

Вариационная маржа – разница между текущей фьючерсной ценой базового актива и фьючерсной ценой, сложившейся на дату предыдущих торгов.

Вероятность – 1) в частотном смысле – относительная частота происходящих событий в определённой группе; 2) в субъективном смысле – экспертная оценка ожидаемости тех или иных сценариев.

«В-деньгах» (in-money) – состояние опциона, при котором цена базового актива выше страйка (для опционов call) или ниже страйка (для опционов put).

Внутренняя стоимость опциона – разница между спот-ценой на базовый актив и страйком.

Возможность – экспертная оценка ожидаемости тех или иных реализаций, мера экспертной уверенности в том, что значения параметров будут колебаться в предустановленном диапазоне.

Волатильность – уровень глубины колебаний параметра во времени.

Градации – качественные уровни лингвистической переменной (значения из её терм-множества). Например: {ОН, Н, Ср, В, ОВ}.

Двойственная оптимизационная задача – задача минимизации риска (или волатильности) фондового портфеля при ограничениях на размер доходности портфеля сверху и при ограничениях на размер весов активов в портфеле.

Держатель – владелец фондового опциона. Риск держателя обусловлен размером уплаченной им опционной премии.

Дериватив – производный финансовый инструмент: фьючерс, опцион, другие специализированные инструменты.

Дисперсия финансовой операции – дисперсия ее случайной доходности ξ. Второй центральный момент вероятностного распределения случайной величины ξ.

Доминирование – когда одна альтернатива доминирует другую по одному или более критериев, при этом остальные значения критериев двух альтернатив являются сопоставимыми.

Золотое правило инвестирования – правило, устанавливающее связь между доходностью и риском финансовой операции. Большей ожидаемой доходности отвечает больший риск.

Инвестиционная декларация – правило, по которому инвестиционный фонд формирует свой рыночный портфель. Содержит в своём составе весовые ограничения на входящие в портфель фондовые активы.

Инвестиционное равновесие – принцип, согласно которому в текущий момент все варианты инвестирования являются равнопредпочтительными, поэтому переток капитала с одного рынка на другой минимален.

Консервативный инвестор – такой, для которого главным критерием является минимум риска операций, а доходность активов выступает слабым ограничением.

Кусочно-линейное число (число BL-вида) – такое, функция принадлежности которого представляет является кусочно-линейной. Разновидности чисел BL-вида: интервальное, треугольное, трапециевидное.

Лингвистическая переменная – математический объект, в состав которого входят носитель, терм-множество градаций и набор функций принадлежности носителя градациям.

Лингвистический классификатор – лингвистическая переменная, удовлетворяющая критерию серой шкалы Поспелова.

Линия поддержки – это линия, ниже которой цена не должна опускаться.

Линия сопротивления – это линия, выше которой цена не должна подняться.

Математическое ожидание – первый начальный момент вероятностного распределения.

Мера жажды доходности – критерий, выражающий стремление инвестора к максимизации уровня своей инвестиционной доходности над среднерыночным уровнем.

Мера терпимости к риску - критерий, выражающий готовность инвестора принимать на себя дополнительный риск, в связи с нарастающим уровнем доходности его финансовых операций.

Модельный (индексный) портфель – фондовый портфель, составленный из виртуальных активов (модельных классов). Каждый из таких активов может быть описан рыночным индексом. На следующем шаге формирование портфеля идёт наполнение модельного портфеля реальными базовыми активами и опционами на них.

Моменты вероятностного распределения – числовые характеристики распределения, характеризующие его форму. Различают начальные и центральные моменты k-го порядка.

«Мусорные» облигации (junk bonds) – облигации, потерявшие свой кредитный рейтинг, исключённые из биржевых торгов. Вследствие повышенного риска, обладают повышенным уровнем доходности.

Мягкие вычисления – операции с сегментными интервалами принадлежности нечётких чисел, основанные на правилах интервальной арифметики Дюбуа-Прада.

«Не-в-деньгах» (out-of-money) – состояние опциона, когда спот-цена базового актива ниже страйка (для опциона call) или выше страйка (для опциона put).

Недоминируемые альтернативы – альтернативы, в которых доминирование по одному фактору сопровождается проигрышем по другому фактору. Это не допускает возможности однозначного сравнения недоминируемых альтернатив.

Нечёткая функция – функция, аргумент которой – скаляр, а значение – нечёткое число.

Нечёткие множества – множества, принадлежность элементов к которым в общем случае не может быть определена однозначно (с полной уверенностью). Примеры – лингвистические переменные, нечёткие числа.

Нечёткое число – нечёткое множество, определённое на вещественном носителе и выражающее качественное свойства приближённого равенства носителя заранее предустановленному значению.

Носитель лингвистической переменной – дискретное или непрерывное подмножество вещественных чисел.

Ожидаемая доходность (эффективность) финансовой операции – это математическое ожидание ее случайной доходности ξ.

Опцион (фондовый) – право владельца опциона (держателя) купить (CALL) или продать (PUT) базовый актив у выдающей опцион стороны (у райтера). Параметры опциона: опционная премия, страйк, дата экспирации.

Паника – состояние финансового рынка, характеризующееся массовым сбросом активов и соответствующим падением цен на них.

Парето-оптимальные решения – множество недоминируемых альтернатив, выделенное из их полной группы.

Паттерн – ценовая фигура, при распознавании которой делается вывод о дальнейшем движении цены на актив. Один из инструментов технического анализа финансового рынка.

Плотность распределения – производная от кумулятивной функции распределения случайной величины.

Портфель – организованная совокупность финансовых активов, обладающая стартовым весовым распределением активов внутри полной группы.

Портфельное облако – полное множество портфельных альтернатив, зафиксированное в координатах «риск-доходность».

Портфель Тобина – портфель, состоящий из двух активов – безрискового и рискового. Пример безрискового актива – облигация, пример рискового актива – акция.

Промежуточный инвестор – такой, для которого цели по доходности и по риску являются равнозначными. В зависимости от ситуации, один из критериев может выступить как цель, а второй – как ограничение.

Прямая оптимизационная задача – задача оптимизации портфеля, где целевой функцией выступает доходность портфеля, а ограничениями – риск (сверху) и весовые ограничения на долю активов в портфеле.

Райтер опциона – сторона, выписывающая опцион в пользу держателя. Райтер, выписывая опцион, принимает на себя безусловное обязательство по его выполнению. В этой связи, риск райтера по опциону является неограниченным.

«Ралли» - состояние финансового рынка, характеризующее бурным ростом цен на активы и перетоком капитала со смежных рынков на данный.

Ребалансинг – принудительное изменение долевого распределения активов в портфеле, с продажей из портфеля одних активов и закупкой других.

Риск – возможность того, что случайная величина оказывается меньше заведомо установленного норматива. Обозначение: Risk = Poss $\{ X < L\}$.

Риск-функция (вероятностная) – модельная зависимость риска актива или портфеля, оцениваемых как вероятность, от уровня минимально-приемлемой доходности.

Риск-функция (нечётко-множественная) - – модельная зависимость риска актива или портфеля, оцениваемых как субъективно оцениваемая возможность, от уровня минимально-приемлемой доходности.

Ряд распределения – набор частот попадания испытаний в предустановленные диапазоны (ячейки). Сумма частот ряда распределения равна единице.

Сборка «актив + опцион» - портфель, в котором присутствуют как базовые активы, так и опционы на эти активы. В зависимости от соотношения активов и опционов, с точки зрения их долевого распределения в сборке, говорят об уровне покрытия активов опционами.

Серая шкала Поспелова – лингвистический классификатор, удовлетворяющий набору дополнительных условий: а) уверенность в принадлежности к градации падает тем же темпом, что нарастает уверенность в смежной градации; б) максимальная уверенность (функция принадлежности) равна единице; в) максимум неопределённости в классификации отвечает уровню принадлежности 0.5. Свойству серой шкалы Поспелова отвечает классификатор на трапециевидных нечётких числах.

Справедливая (фундаментальная) стоимость бизнеса – оценка стоимости, базирующаяся на фундаментальных факторах бизнеса и на сложившемся уровне признания инвестиций рациональными.

Страйк – расчётная цена базового актива на момент исполнения опциона на этот актив.

Терм-множество лингвистических переменных – набор качественных градаций, образующих полную группу с точки зрения оттенков описания предмета или процесса.

Технический анализ - прогнозирование изменений цен в будущем на основе анализа изменений цен в прошлом. В его основе лежит анализ временных рядов цен — «чартов» (от англ. chart).

Трапециевидные числа – нечёткие множества, определённые на вещественном носителе, функция принадлежности которых имеет вид трапеции.

Треугольная нечёткая функция – функция, значениями которой являются треугольные нечёткие числа.

Треугольные числа – нечёткие множества, определённые на вещественном носителе, функция принадлежности которых имеет треугольный вид.

Финансовый рынок - это совокупность отношений, возникающая в процессе обмена экономических благ, с использованием денег и денежных эквивалентов в качестве актива-посредника.

Форсирование – эффект, состоящий в доставлении портфелю дополнительной доходности, в связи с внедрением в портфель опциона call.

Фундаментальный анализ – анализ финансовых рынков, устанавливающий связь между ценовыми рыночными тенденциями и состоянием макроэкономических объектов, обуславливающих состояние рынка.

Функция принадлежности (функция уверенности) – атрибут нечёткого множества. Изменяется от 1 (полная уверенность в принадлежности) до 0 (полная уверенность в непринадлежности). Определена на носителе нечёткого множества.

Функция распределения – вероятность того, что случайная величина X меньше заранее предустановленного значения x. Обозначение: $F(x) = Pr\{X < x\}$.

Хеджирование – операции с фондовым портфелем, приводящие к минимизации рисков и отсечению убытков.

Хедж – фонды – инвестиционные фонды, обладающие масимально-агрессивным рыночным поведением, сопряжённым с инвестициями в деривативы, недвижимость, предметы антиквариата и т.д.

Экспирация (expiration) – событие исполнения опционного или фьючерсного договора.

Эффективная граница – множество недоминируемых альтернатив в составе портфельного облака.

«Толстые хвосты» - феномен деформации исходного вероятностного унимодального распределения, связанный с увеличением вероятностной меры на левом и правом хвостах функции плотности распределения.

«Японские свечи» - способ отображения внутридневной динамики рыночных торгов. Термин технического анализа.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Англоязычные сокращения

av – среднее значение параметра

Cap – рыночная капитализация бизнеса

DX – дисперсия случайной величины x

F – кумулятивная функция распределения случайной величины.

f – плотность распределения случайной величины

Grad – уровень градиента

I – доход держателя по опциону

L – нормативный уровень параметра.

max – максимальное значение параметра

min – минимальное значение параметра

MX – математическое ожидание случайной величины X

N – число активов в портфеле

PB – отношение стоимости бизнеса к балансовой стоимости собственного капитала

PE – отношение стоимости бизнеса к годовой чистой прибыли

Poss – возможность

Pr – вероятность

PrNeg – вероятность негативного исхода событий

R – доходность по портфелю

r – доходность по отдельному компоненту портфеля

Risk - риск

S – цена базового актива

Sh – коэффициент Шарпа

T, t – временной интервал

X – случайная величина

x – вес активов в портфеле. Или: предустановленный аргумент функции распределения.

y – страйк по опциону

z – опционная премия

Греческие обозначения

α - уровень функции принадлежности, по которому строится сегментный интервал

β - бета-коэффициент актива в модели CAPM

Δ - символ отклонения, разности

δ - дельта-функция Дирака

φ - плотность распределения случайной величины

λ - обозначение для частного интервального риска в составе общей оценки риска

σ - среднеквадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии)

ξ - случайная величина доходности финансовой операции

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ